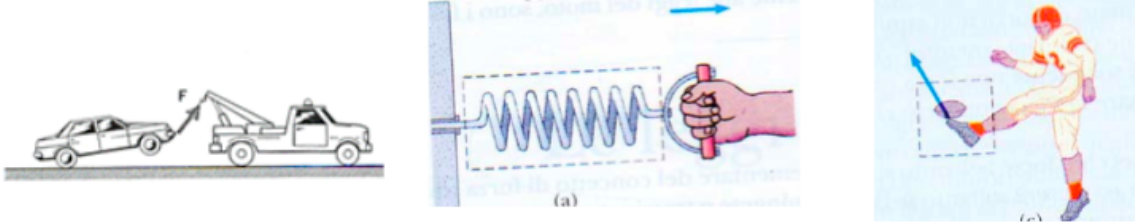


Dinamica

[studio delle cause del moto: **forze**]

Il termine **forza** nel senso comune indica una **trazione** o una **spinta**



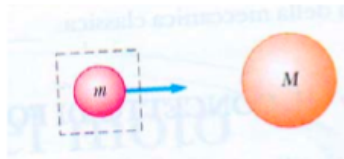
La forza è una grandezza **vettoriale**:

una trazione o spinta ha sempre

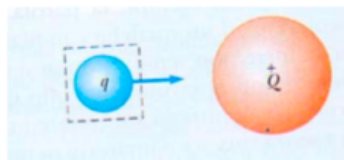
- ✗ una intensità (il modulo)
- ✗ una direzione
- ✗ un verso

forze di **contatto**: esprimono risultato di **contatto fisico** tra corpi

forze a **distanza**: agiscono attraverso lo **spazio vuoto**
[campi di forze]



forza **gravitazionale**



forza **elettrica**



forza **magnetica**

se la forza è una **quantità reale** deve essere **misurabile**
⇒ deve indurre **effetti** che possono essere **quantificati**

1600 Newton: esperimenti concettuali
(oggetto in moto su superficie senza attrito)



*non è nella natura di un oggetto fermarsi
una volta che sia posto in moto*

Prima legge di Newton [legge di inerzia]

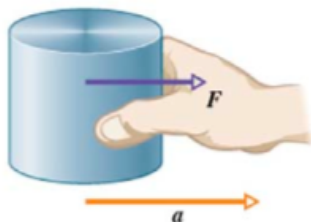
*Un corpo rimane nel suo stato di **quiete** o nel suo stato di **moto rettilineo a velocità costante** se una forza risultante non nulla non lo costringe a variare il suo stato di moto*

L'unico moto 'naturale' e' rettilineo a velocità costante

Se forza nulla o forze bilanciate → moto rettilineo uniforme
(per esempio automobile: forza motrice = attrito)

✗ **assenza di forze** implica assenza di variazione di moto,
cioè assenza di accelerazione

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$$



una forza F applicata ad un corpo
gli imprime una accelerazione

✗ un corpo senza accelerazione si dice in **equilibrio**

Sistemi di riferimento inerziali

La prima legge di Newton
non vale in tutti i sistemi di riferimento

*un sistema di riferimento è **inerziale**
se in esso vale la prima legge di Newton*

*qualunque sistema di riferimento in **moto** con **velocità costante** rispetto ad un riferimento inerziale e anch'esso **inerziale***

la **terra NON** è un sistema inerziale:

$$a_c = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

accelerazione **centripeta**
verso il Sole [moto attorno al sole]

$$a_c = 3.37 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

accelerazione **centripeta**
verso il centro della terra
[moto attorno all'asse terrestre]

sono **accelerazioni piccole** rispetto a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

⇒ si suppone che un sistema di riferimento **vicino** alla superficie terrestre sia un riferimento inerziale

esempio:

prove su un vagone
per verificare se è un
sistema inerziale



Se sistema **NON** è inerziale (cioè se ha accelerazione) sono presenti **forze apparenti** o **fittizie**

principio di relatività galileiana



perché quando si
viaggia in aereo
sembra di **muoversi**
lentamente?

aereo di linea:

velocità di crociera 800 km/h

atterraggio 200 km/h

è conseguenza del **principio di relatività galileiana**:

*non esistono differenze fisiche avvertibili
tra un **corpo in quiete** (perfettamente fermo)
e un **corpo che si muove**, anche a elevate velocità, con moto
rettilineo uniforme (cioè a velocità e direzione costanti)*

In altre parole:

**In aereo con finestrini chiusi e senza vibrazioni o rumori non si avrebbe
nessuna possibilità di capire se si è fermi o in movimento**

La massa inerziale

Osservazione: una forza produce accelerazioni di intensità diversa su corpi diversi

esempio:

stesso calcio a

palla da baseball → **grande** accelerazione

palla da bowling → **piccola** accelerazione

la differenza di accelerazione è dovuta alla **differenza di massa**

corpi **meno** massicci ricevono
una accelerazione **maggiore**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

massa

- proprietà **intrinseca** di un corpo
- indipendente da ciò che lo **circonda**
- indipendente dal **metodo** di misura
- grandezza **scalare**
- obbedisce alle regole di **aritmetica**

massa $\neq$ peso

massa: mette in relazione

forza applicata al corpo e accelerazione subita

peso: modulo della forza esercitata dalla terra sul corpo
(varia con la posizione)

esempio: Terra – Luna

$$peso_{luna} < peso_{terra}$$

Seconda legge di Newton

L'accelerazione di un oggetto è

✗ *direttamente* proporzionale alla **forza** risultante su di esso

✗ *inversamente* proporzionale alla sua **massa**

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se agisce forza → variazione del vettore velocità nel tempo → accelerazione o decelerazione o cambio direzione nel moto curvilineo

$$\Sigma F_x = m a_x$$

$$\Sigma F_y = m a_y$$

$$\vec{F}_{net} = \Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma F_z = m a_z$$

Si considerano solo la somma delle forze che agiscono sul corpo, non tutte le forze presenti nel problema

un corpo è in equilibrio quando la somma di tutte le forze agenti è nulla

$$\vec{F}_{net} = 0$$

Dimensioni e Unità di misura

Dimensione **[F] = [MLT⁻²]**

Unità di misura nel MKS: **Newton (N) = kg m s⁻²**

Unità di misura nel CGS: **dina = gr cm s⁻²**

1 N = 10⁵ dine

1 N imprime ad una massa di 1 kg un'accelerazione di 1 m s⁻²

1 kg_p imprime ad una massa di 1 kg un'accelerazione g = 9.8 m s⁻²; 1 kg_p = 9.8 Newton

Si definisce la **quantita' di moto** di un corpo di massa m in moto con velocita' v la quantita':

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Introducendo la quantita' di moto la seconda legge si puo' scrivere come:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

La forza che agisce su un oggetto e' proporzionale alla derivata rispetto al tempo della quantita' di moto.

Se la forza e' nulla $\rightarrow$ la quantita' di moto e' costante

La derivata di una costante e' zero

Conservazione della quantità di moto

La quantità di moto di un corpo isolato (cioè non soggetto a forze) si conserva (modulo e verso costanti nel tempo). Infatti:

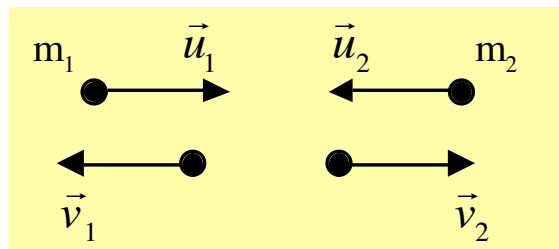
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{costante}$$

Se consideriamo interazione fra due punti materiali (sistema isolato):

→ **quantità di moto totale del sistema si conserva**

→ **variazione della quantità di moto dei due corpi è uguale e contraria.**

Consideriamo le velocità prima e dopo l'urto di due masse diverse.



$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

$$m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{u}_1 = - (m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{u}_2)$$

Nell'urto teoria ed esperienza dimostrano che la variazione della quantità di moto del corpo 1 è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto del corpo 2.

Postulato di interazione di Newton:

In ogni interazione il rapporto tra la variazione delle velocità Δv dei due corpi (velocità dopo l'urto-velocità prima dell'urto) è costante:

$$\frac{\Delta v(\text{corpo1})}{\Delta v(\text{corpo2})} = -\frac{m_2}{m_1} = -k$$

Da cui si ricava la relazione:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

prima dell'urto

dopo dell'urto

In un sistema isolato la somma vettoriale delle quantità di moto dei corpi prima dell'urto è uguale alla somma vettoriale dopo l'urto → **la quantità di moto totale del sistema dei due corpi isolati si conserva.**

La conservazione della quantità di moto in un sistema isolato vale anche per un sistema ad n corpi.

Esempio

Si ha un sistema isolato in quiete con una molla compressa in mezzo a 2 masse (m_1, m_2) → quantità di moto totale sistema è 0.

Se la molla scatta le masse partono con velocità diverse in direzione opposta tale per cui:

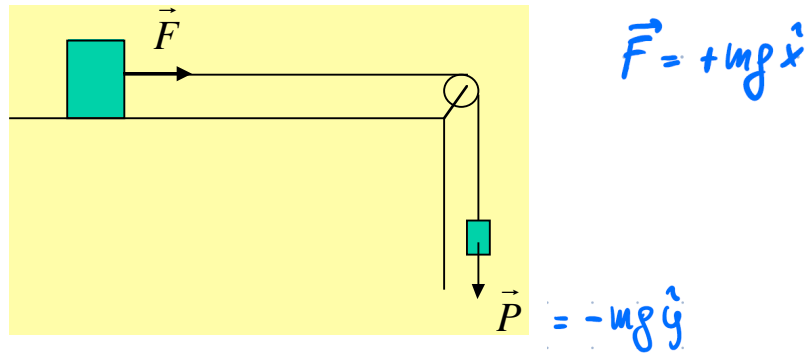
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

quindi: $\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2$ velocità inversamente proporzionali alle masse

Forza peso

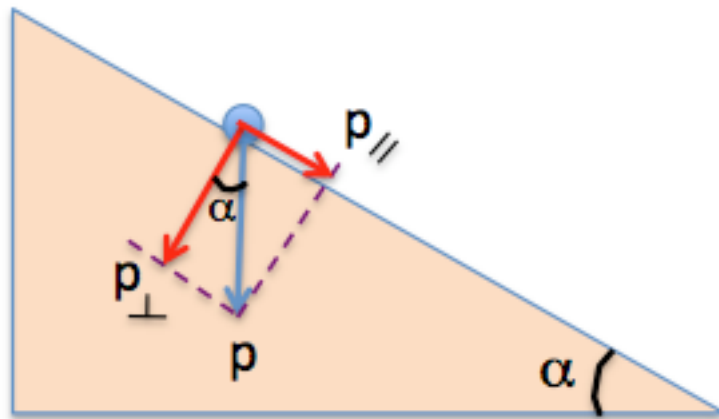
$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Caso 1: Forza continua e costante



Caso 2: Forza costante e continua

Corpo in moto lungo un piano inclinato



Forza peso e': $\vec{p} = m \vec{g} = -mg\hat{y}$

Componente forza peso parallela e perpendicolare al piano sono:

$$p_{par} = m g \sin\alpha$$

$$p_{per} = m g \cos\alpha$$

Terza legge di Newton

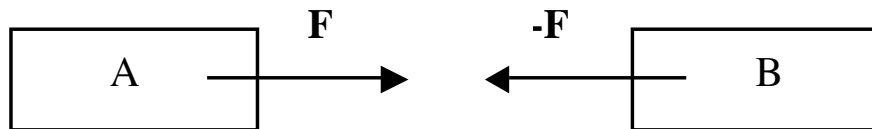
[principio di azione e reazione]

Se due corpi interagiscono le forze esercitate da un corpo sull'altro sono

✗ *uguali in modulo e direzione*

✗ *opposte in verso*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

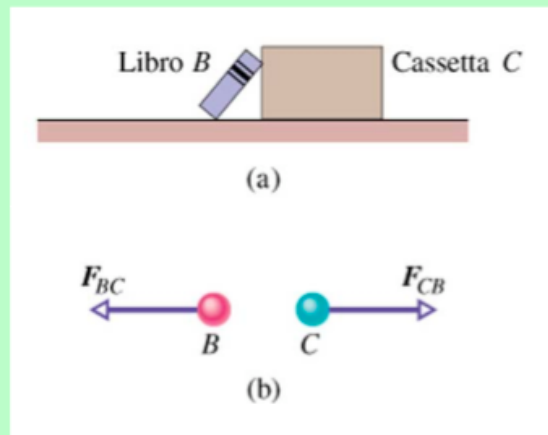


esempio:

libro B appoggiato
su cassetta C

F_{BC} = forza esercitata
da libro su cassetta

F_{CB} = forza esercitata
da cassetta su libro



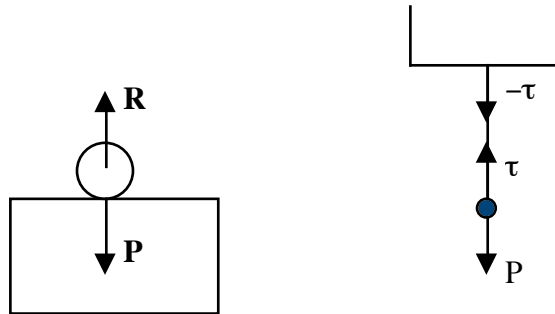
le forze di azione e reazione agiscono sempre su **corpi diversi:**

✗ non si combinano in una forza risultante;

✗ non si elidono a vicenda.

Esempi:

Reazione del vincolo (piano d'appoggio rigido, gancio sospeso, tensione della corda)



Esempi:

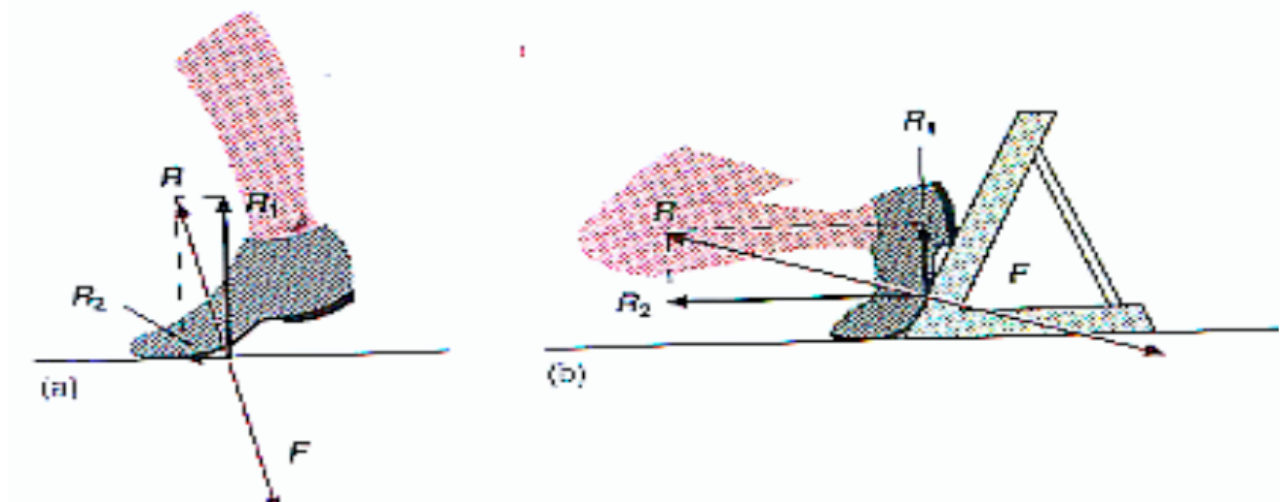
Rinculo del fucile quando spara

Saltando da una barca essa si allontana

Difficolta' nel spingere una cassa su un pavimento molto liscio

Ogni forma di locomozione e propulsione si basa su azione-reazione:

Esempi: pedone, sciatore, vogatore, nuotatore, elica.....



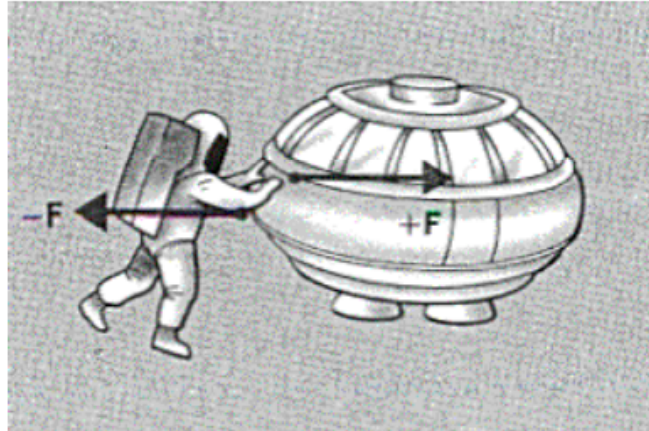
effetto indotto dalle forze di azione e reazione può essere sensibilmente differente

esempio:

$$F = 36 \text{ N}$$

$$m_{\text{astronave}} = 11000 \text{ kg}$$

$$m_{\text{uomo}} = 92 \text{ kg}$$



$$a_{\text{astronave}} = \frac{36}{11000} = 0.0033 \text{ m/s}^2$$

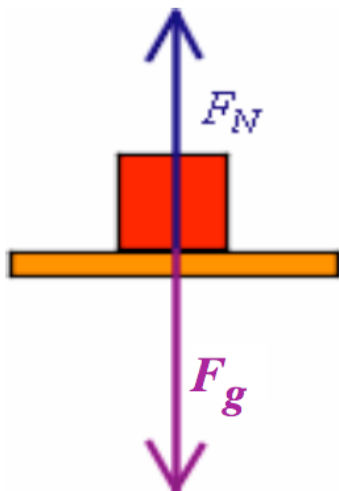
$$a_{\text{uomo}} = \frac{-36}{92} = -0.39 \text{ m/s}^2$$

Reazione del vincolo

Se un corpo **preme** su una superficie:

- ✗ la superficie si deforma (anche se apparentemente rigida)
- ✗ spinge il corpo con forza normale N
- ✗ N è sempre perpendicolare alla superficie stessa

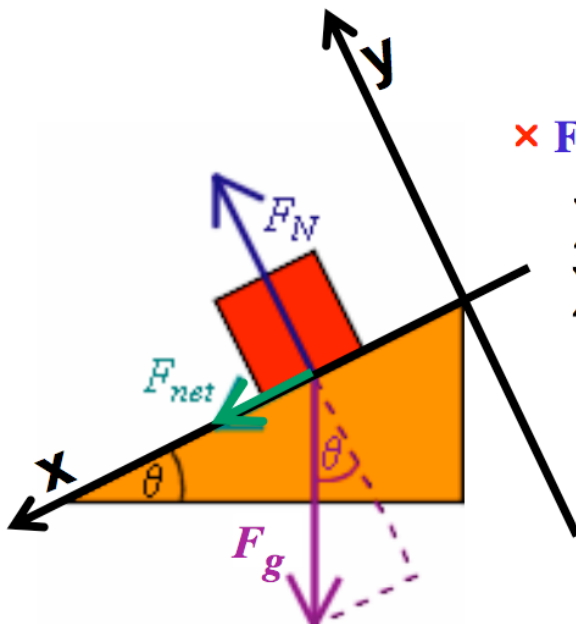
La reazione del vincolo bilancia il peso e determina l'equilibrio



✗ F_N è sempre **perpendicolare** alla superficie di **appoggio**

✗ F_g è sempre **perpendicolare** alla superficie della **terra**

Forza peso e reazione del vincolo sono sempre uguali?



✗ F_N **non** sempre bilancia F_g

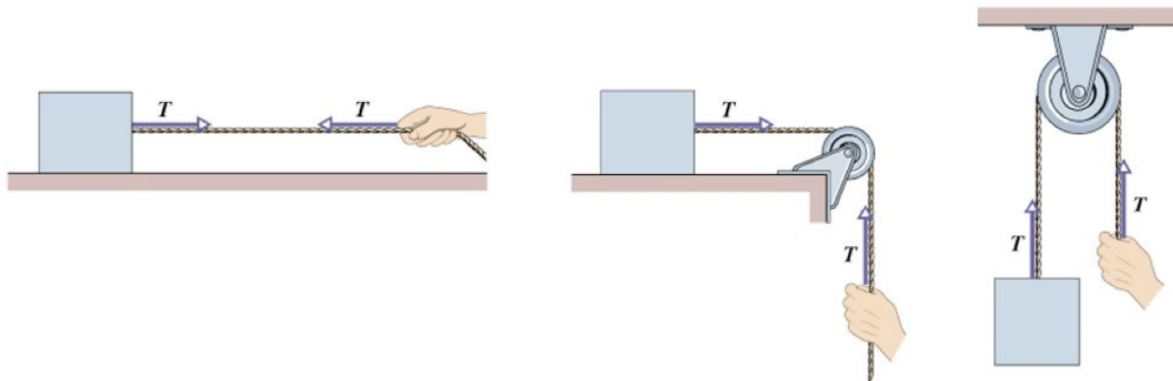
$$\sum F_x = F_g \sin \theta = ma_x \neq 0$$

$$\sum F_y = F_N - F_g \cos \theta = 0$$

F_N bilancia **SOLO** componente di F_g normale al piano di appoggio

Tensione della corda

- ✓ Una corda tesa e' in grado di trasmettere una forza al corpo al quale viene fissata: tale forza e' detta **tensione**
- ✓ La **tensione** e' sempre diretta lungo la direzione della corda ed e' applicata al punto di attacco della corda stessa
- ✓ Una corda ideale ha **massa trascurabile** ed e' **inestensibile**
- ✓ In una corda ideale la tensione viene trasmessa inalterata da un punto ad un altro della corda



Esempio: tensione della corda

Forze agenti sulle masse:

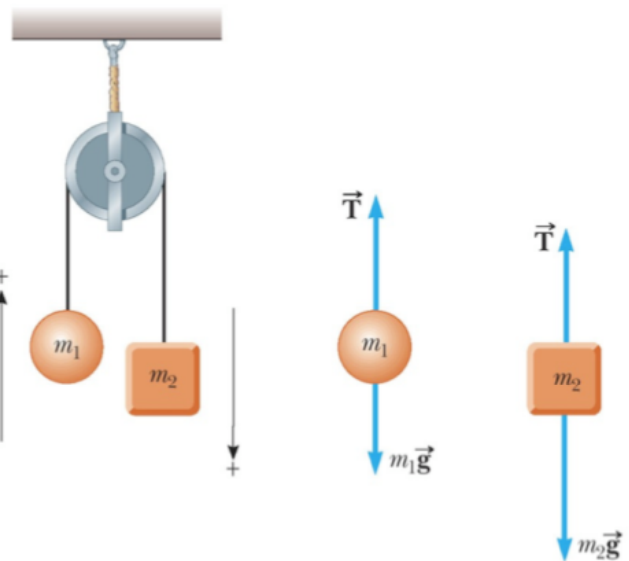
- 1) Tensione della corda (la stessa per i due corpi)
- 2) Forza di gravita'
- 3) I corpi hanno la stessa accelerazione perche' connessi da un filo

- Oggetto 1: $T - m_1g = m_1a_y$

- Oggetto 2: $m_2g - T = m_2a_y$

- Sommiamo le due equazioni:
 $-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$ da cui

$$a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$



- Sostituendo l'ultima equazione nella prima: $T = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} \right) g$

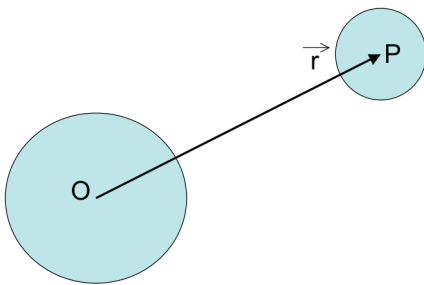
Forza di gravitazione universale

Ogni corpo attrae un altro corpo con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle massa ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

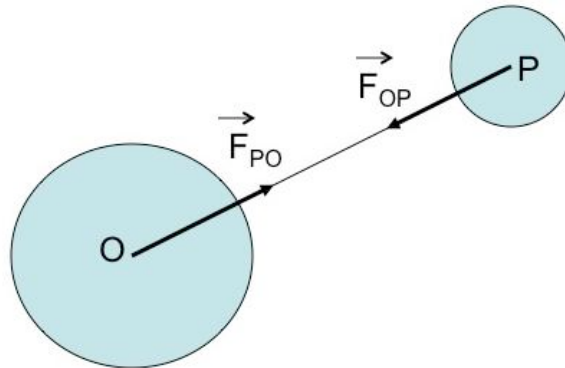
Cio' vale per particelle puntiformi. Se corpi sferici (Sole, Luna, Terra, ecc.) si ha che:
Nella sua azione gravitazionale un corpo sferico agisce come se tutta la massa fosse concentrata nel centro (se la massa ha simmetria sferica)

Forza di una sfera O su sfera P:

$$\vec{F}_{OP} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



$\vec{r}$ e' vettore posizione se l'origine e' in O



Segno “-“ perche' la forza e' attrattiva cioe' va da P ad O (contraria ad $\vec{r}$)

Per il terzo principio anche sfera P esercita una forza su sfera O ($\vec{F}_{OP} = -\vec{F}_{PO}$)

$$\vec{F}_{PO} = +G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

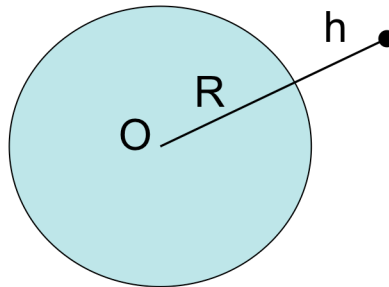
G = costante gravitazionale

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} (\text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1})$

Relazione fra G e g

Consideriamo una massa m vicino alla Terra (massa M) posta ad altezza h dal suolo. E' soggetta alla forza:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$



$$r = R + h$$

Poiche' $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \rightarrow r \sim R$

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

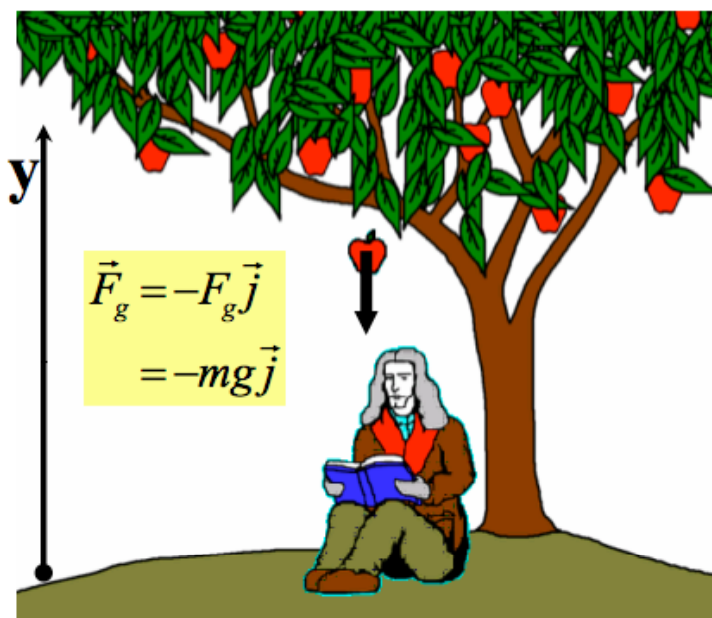
Per la seconda legge:

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg$$

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

ogni corpo in caduta libera subisce accelerazione gravitazionale g diretta verso il centro della Terra.

Quindi il **peso** e' la forza esercitata dalla Terra su un corpo $\rightarrow$ per reazione anche il corpo esercita una forza sulla Terra, ma, considerando la massa della Terra in confronto a quella del corpo, l'effetto e' trascurabile.



se il secondo corpo è la **terra**:

$\vec{F}_g$ diretta verso il centro della terra

ogni corpo in **caduta libera** subisce accelerazione **g** diretta verso il centro della terra

✗ **g** varia con la posizione geografica

✗ diminuisce all'aumentare dell'altezza

$$g = G \frac{M_{terra}}{r^2}$$

N.B. se $r = R_T = 6370 \text{ km} \Rightarrow g = G \frac{M_{terra}}{r^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$

Altitudine (km)

g (m/s²)

0	9.83	superficie media terrestre
8.8	9.80	Everest
36.6	9.71	max quota pallone con equipaggio
400	8.70	navette spaziali

$$P = mg$$

$$\vec{P} = -mg \vec{j} = m\vec{g}$$

peso dipende da **g** $\Rightarrow$ varia con la posizione geografica
massa **NON** dipende da **g** $\Rightarrow$ proprietà intrinseca

esempio:

$$g_{terra} = 9.8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow p_{terra} > p_{luna}$$

$$g_{luna} = 1.62 \text{ m/s}^2 \quad m_{terra} = m_{luna}$$

$$g = G \frac{M_{terra}}{r^2} \Rightarrow \begin{array}{l} R_T = 6370 \text{ km}, \quad M_T = 5.976 \times 10^{24} \text{ kg} \\ R_L = 1737 \text{ km}, \quad M_L = 7.349 \times 10^{22} \text{ kg} \end{array}$$

Forza centripeta [moto circolare uniforme]

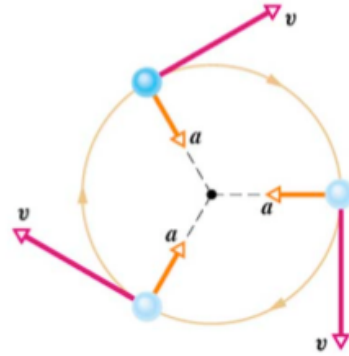
corpo con:

- ✗ velocità **v** costante in modulo
- ✗ lungo **traiettoria circolare**

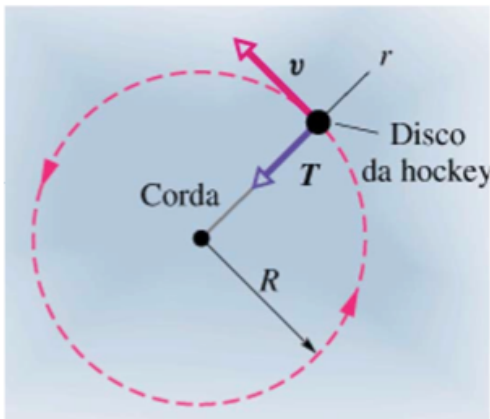
subisce accelerazione centripeta:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

- ✗ diretta verso il **centro** circonferenza
- ✗ sempre **perpendicolare** a **v**



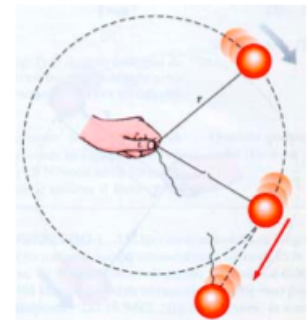
esempio: disco su traiettoria **circolare**



inerzia del disco: moto su linea retta
tensione del filo: mantiene
traiettoria circolare

$$T = F_r = ma_r = m \frac{v^2}{r}$$

se **rompo** il filo il disco si muove
lungo **linea retta** tangente alla circonferenza
[**v** è infatti **costante**]

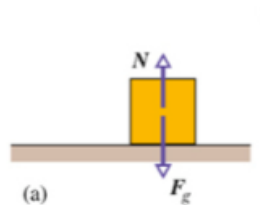
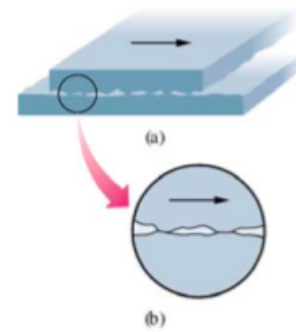


Forza centripeta e' qualunque forza che causa accelerazione centripeta

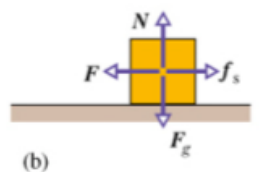
Forza di Attrito Statico

forza necessaria per *mettere in moto* un corpo di massa M su una superficie k

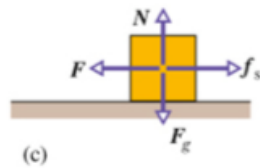
proviene dalla **scabrosità** delle superfici
[coinvolge anche forze elettrostatiche]



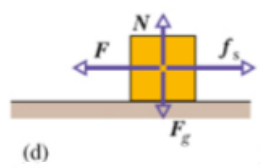
(a)



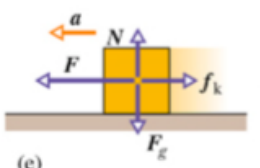
(b)



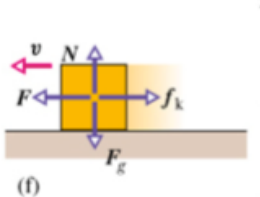
(c)



(d)



(e)



(f)

quiete

accel.

**velocità
costante**

corpo in quiete
non applico nessuna forza.

applico forza $F < f_s$
il corpo rimane fermo

aumento F ma sempre $F < f_s$
il corpo rimane fermo

$F = f_s$
il corpo rimane fermo

se $F > f_k$
il corpo acquista accelerazione **a**

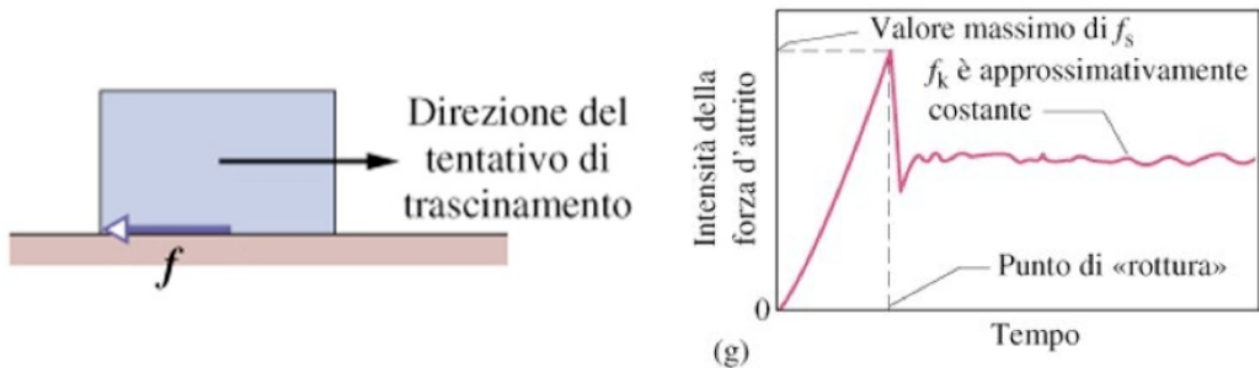
per mantenere **v** costante riduco F :
 $F < F_{\max}$

Attrito statico e attrito dinamico

La forza F_s necessaria a rompere le microfusioni e a far iniziare lo scorrimento è responsabile dell'*attrito statico*.

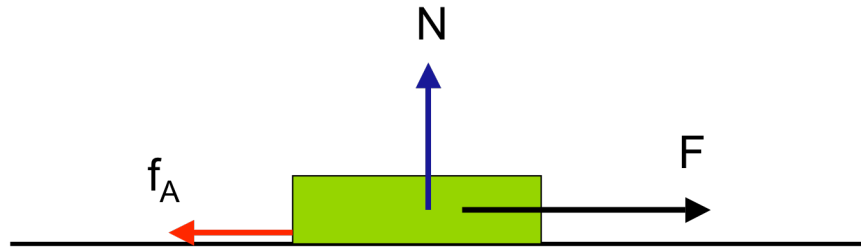
Una volta iniziato, lo scorrimento può essere mantenuto applicando una forza F_d esterna che vinca l'*attrito dinamico*. Di solito, $F_s \geq F_d$.

Il grafico rappresenta l'andamento nel tempo dell'intensità della forza di attrito quando si applica dall'esterno una forza crescente F fino a far muovere il corpo in esame



Forza di Attrito Dinamico

*forza che si oppone a qualsiasi moto di un corpo che **striscia** su un materiale*



Attrito e' fondamentale nella vita quotidiana

Principale causa di attrito e' **forze intermolecolari** tra due superfici solide a **contatto** (adesione). Causa di attrito e' anche rugosita'

Supponiamo corpo accelerato con forza F .

Forza di attrito F_a si oppone al moto

Equazione del moto: **$F - F_a = m a$**

Se $F > F_a$ la risultante e' $(F - F_a) \rightarrow$ il corpo ha accelerazione: **$a = \frac{F - F_a}{m}$**

Se il corpo si muove con velocita' costante allora $F = F_a$ (in modulo) ed hanno verso opposto $\rightarrow$ risultante delle forze e' nulla $\rightarrow$ moto rettilineo uniforme

Supponiamo un corpo in movimento in presenza di forza di attrito F_a . F_a si determina sperimentalmente proporzionale alla forza di vincolo F_N :

$$F_a = \mu_c F_N$$

μ_c = coefficiente di attrito dinamico o cinetico

Proprieta' dell'attrito

**Il modulo di F_a e' proporzionale alla reazione del vincolo N
(se il corpo e' semplicemente appoggiato e' forza normale
al piano che equilibria la forza peso)**

F_a e' parallela alla superficie a contatto e opposta al moto

Coefficienti di attrito $\mu_c < \mu_s$

F_a e' indipendente dall'estensione delle superfici a contatto

F_a dipende dalla natura delle superfici a contatto.

F_a indipendente dalla velocita' del corpo

coefficienti di attrito

Materiale	Statico	Dinamico o Radente
Acciaio su acciaio	0.74	0.57
Acciaio su acciaio lubrificato	0.11	0.05
Alluminio su acciaio	0.61	0.47
Rame su acciaio	0.53	0.36
Ottone su acciaio	0.51	0.44
Vetro su vetro	0.94	0.40
Rame su vetro	0.68	0.53
Teflon su teflon	0.04	0.04
Teflon su acciaio	0.04	0.04
Acciaio su aria	0.001	0.001
Acciaio su ghiaccio	0.027	0.014
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio asciutto	0.2	0.15
Gomma su ghiaccio bagnato	0.1	0.08
Grafite su grafite	0.1	
Gomma su asfalto		0.97

IL PRODOTTO SCALARE

Definiamo un'operazione di moltiplicazione fra vettori.

Come si legge

Il simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si legge «a scalare b».

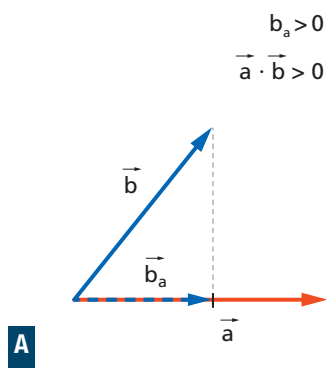
Si chiama **prodotto scalare** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo per l'intensità del vettore componente del secondo lungo il primo.

In formula:

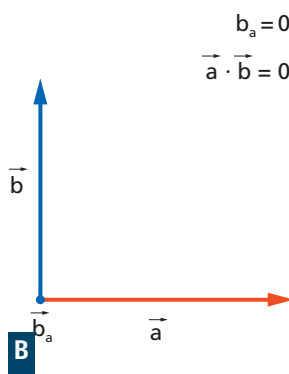
$$\text{prodotto scalare } \vec{a} \cdot \vec{b} = a b_a$$

modulo di $\vec{a}$
componente di $\vec{b}$ lungo $\vec{a}$

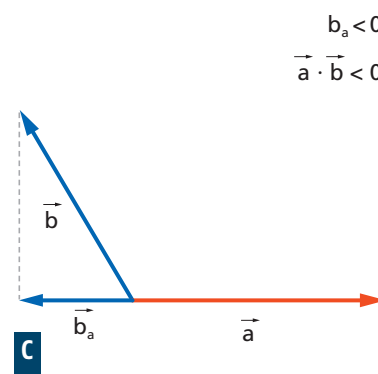
► Se l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è acuto, b_a si prende positivo e anche il prodotto scalare è positivo.



► Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari tra loro, b_a è nullo e anche il prodotto scalare è uguale a zero.



► Se l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è ottuso, b_a è considerata negativa e anche il prodotto scalare è minore di zero.



Per il prodotto scalare vale la **proprietà commutativa**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

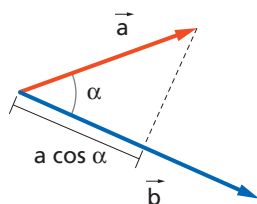
Ciò significa che $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è dato anche dal prodotto del modulo di $\vec{b}$ per l'intensità a_b del vettore componente di $\vec{a}$ lungo $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab_a = ba_b.$$

La formula trigonometrica del prodotto scalare

Se si conoscono i moduli a e b dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e l'angolo α che essi formano, il prodotto scalare può essere espresso anche dalla formula

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$



Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso tra di essi.

DOMANDA

I vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso; i loro moduli valgono, rispettivamente, 8,0 e 6,5.

► Calcola il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

ESERCIZI

IL PRODOTTO SCALARE

1 Il prodotto scalare tra due vettori è nullo:

- ☐ A quando i vettori sono uguali ma hanno verso opposto.
- ☐ B quando i vettori sono paralleli.
- ☐ C quando i vettori sono perpendicolari.
- ☐ D esclusivamente quando entrambi i vettori sono nulli.

3 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno moduli $a = 6,82$ e $b = 9,47$ e formano tra loro un angolo di 45° .

- Quanto vale il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

[45,7]

4 I vettori $\vec{d}$ ed $\vec{e}$ hanno moduli $d = 5,39$ ed $e = 4,65$ e formano tra loro un angolo di 120° .

- Quanto vale il prodotto scalare $\vec{d} \cdot \vec{e}$?

[− 12,5]

5 Considera un vettore $\vec{a}$ e altri cinque vettori $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, di modulo uguale ad a , orientati rispetto ad $\vec{a}$ nel seguente modo: $\vec{b}$ è parallelo ad $\vec{a}$ con lo stesso verso, $\vec{c}$ è parallelo ad $\vec{a}$ ma con verso opposto, $\vec{d}$ è perpendicolare ad $\vec{a}$, $\vec{e}$ è inclinato di 30° rispetto ad $\vec{a}$ e $\vec{f}$ è inclinato di 120° rispetto ad $\vec{a}$.

- Ordina, dal più piccolo al più grande, i valori dei prodotti scalari di $\vec{a}$ con i cinque vettori elencati.

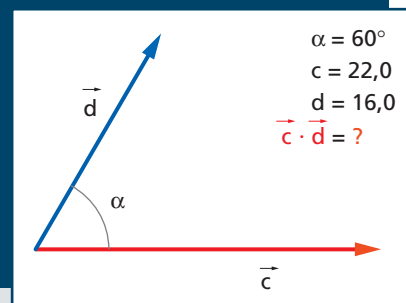
[$\vec{a} \cdot \vec{c} = -a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{f} = -0,5 a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{e} = 0,87 a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2$]

2 PROBLEMA SVOLTO

Calcolo di un prodotto scalare

I due vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$ formano un angolo di 60° . I loro moduli sono $d = 16,0$ e $c = 22,0$.

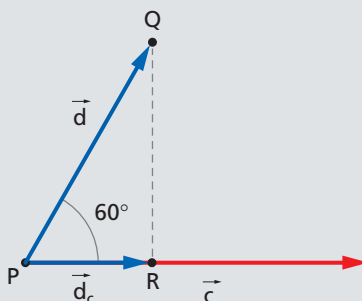
- Calcola il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{d}$.



Dati e incognite

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Modulo del vettore $\vec{c}$	c	16,0	
	Modulo del vettore $\vec{d}$	d	22,0	
	Angolo tra $\vec{c}$ e $\vec{d}$	α	60°	
INCOGNITE	Prodotto scalare	$\vec{c} \cdot \vec{d}$	?	

Ragionamento



- Disegniamo $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{d}_c$. Con l'angolo di 60° , i vettori $\vec{d}$ e $\vec{d}_c$ hanno lo stesso verso, per cui d_c ha segno positivo.
- PQR è un triangolo rettangolo, metà di un triangolo equilatero.

Risoluzione

Il lato $\overline{PR} = d_c$ è la metà del lato $\overline{PQ} = d$

$$d_c = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 22,0 = 11,0$$

Ora si sostituiscono i valori numerici nella formula del prodotto scalare

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = cd_c = 16,0 \times 11,0 = 176$$

Controllo del risultato

Usando la formula trigonometrica otteniamo $\vec{c} \cdot \vec{d}$ in un secondo modo:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = cd \cos \alpha = 22,0 \times 16,0 \times \cos(60^\circ) = 352 \times \frac{1}{2} = 176.$$

Naturalmente, abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima.

Il lavoro meccanico

lavoro: energia *trasferita* a un corpo o da un corpo per mezzo di una **forza**

✗ $\text{lavoro} > 0$ cedo energia

✗ $\text{lavoro} < 0$ prelevo energia

Supponiamo un corpo mosso su un piano da una **forza F costante e parallela allo spostamento** (stessa direzione dello spostamento)

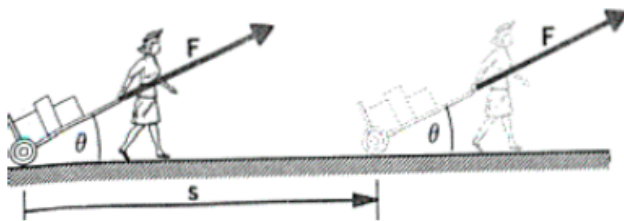
Supponiamo che per azione della forza esso si sposti di una distanza s.

Il lavoro L e':

$$L = F s$$

Il punto di applicazione della forza si e' spostato di s.

espressione del lavoro [forza costante]:



corpo → puntiforme

F → **costante**

s = spostamento finale

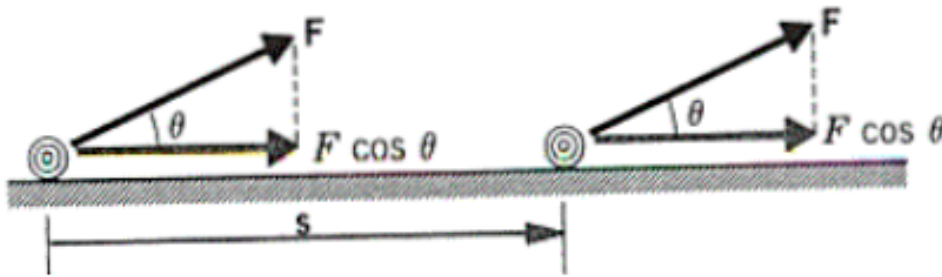
θ = angolo forza-spostamento

Se forza F forma un angolo θ con la direzione s il lavoro L e':

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Il lavoro e' il prodotto scalare della forza per lo spostamento

$$L = F s \cos \theta$$



Compie lavoro solo la componente della forza parallela allo spostamento

$$L = (F \cos \theta) x = F (x \cos \theta)$$

proprietà del lavoro:

- ✗ è un **numero** (non necessita di direzione e verso)
- ✗ è **nullo** se la forza è nulla
- ✗ è **nullo** se lo spostamento è nullo
[spingere contro una cassa che rimane ferma non dà lavoro !!]
- ✗ è **nullo** se lo spostamento è **perpendicolare** alla forza
- ✗ è **positivo** se la forza è parallela e **concorde** allo spostamento
- ✗ è **negativo** se la forza è **opposta** allo spostamento

Se forza opposta allo spostamento si ha $\cos \theta < 1$

($\cos \theta = -1$ se la forza è parallela ed opposta allo spostamento).

Se forza perpendicolare allo spostamento si ha $\cos \theta = 0$

Dimensioni $[W] = [ML^2T^{-2}]$

Unità di misura: Joule (J) = N m (MKS)

erg = dina cm (CGS)

Potenza

rapidità con cui viene svolto il **lavoro**:

✗ potenza **media**

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}$$

✗ potenza **istantanea**

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$$

rapidità con cui la **forza** sviluppa il **lavoro**:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \frac{F \cos \theta dx}{dt} = F \cos \theta \frac{dx}{dt} = Fv \cos \theta$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

dimensioni e unità di misura:

$$[P] = \frac{[L]}{[T]}$$

$$1 \text{ Watt} = 1W = \frac{J}{s}$$

$$1 \text{ cavallo-vapore} = 1CV = 735.5W$$

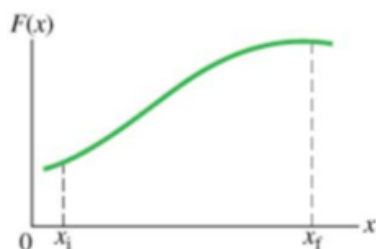
$$1 \text{ Watt ora} = 1W h = (1W)(3600s) = 3.6 \cdot 10^3 J = 3.6 kJ$$

in generale:

la **potenza** è definita per ogni trasferimento di **energia**

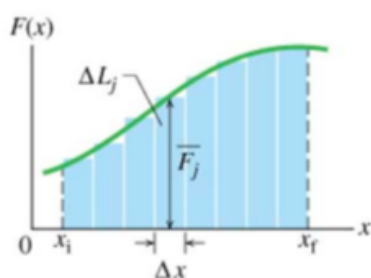
$$P = \frac{dE}{dt}$$

Lavoro svolto da Forza Variabile



(a)

× forza **F(x)** varia con la posizione x

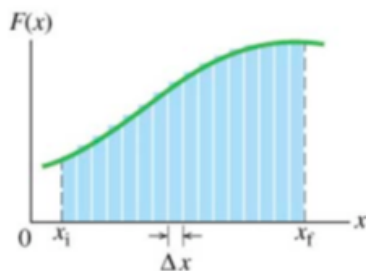


(b)

× **suddivido** il percorso in Δx piccoli, così che $F(x) = \text{costante in } \Delta x$

$\bar{F}_j$ = valore medio di $F(x)$ in Δx

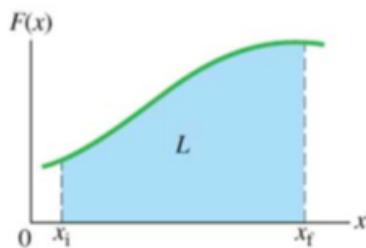
$$\Delta L_j = \bar{F}_j \Delta x$$



(c)

× espressione **approssimata** del lavoro:

$$L = \sum \Delta L_j = \sum \bar{F}_j \Delta x$$



(d)

× risultato **esatto**:

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum [\bar{F}_j \Delta x] = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

lavoro = ***area*** sottesa dalla curva $F(x)$ tra x_i e x_f

energia cinetica:

energia associata
allo **stato di moto** del corpo

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

[N.B. ✗ più un corpo è **veloce**, maggiore è la sua energia
✗ corpo a **riposo** ha energia cinetica nulla]

dimensioni e unità di misura:

$$[K] = [m][v]^2$$

$$1 \text{ joule} = 1J = 1kg \frac{m^2}{s^2}$$

Teorema dell'energia cinetica

*il **lavoro** svolto da una forza costante
nello spostare un corpo puntiforme
è pari alla **variazione** di **energia cinetica** del corpo*

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m v_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = K_f - K_i = L \\ L &= F \cdot s = (ma) \cdot s \quad \Rightarrow \quad K_f = K_i + L \end{aligned}$$

Il lavoro e' una forma di trasferimento di energia meccanica da un sistema all'altro.

Calcoliamo la **relazione** fra lavoro ed energia cinetica nel caso di forza **costante** cioe' accelerazione costante.

Il moto e' rettilineo lungo x.

La forza ha la direzione x del moto rettilineo.

Il lavoro fatto dalla forza nello spostamento da x_0 a x e':

$$\mathbf{L = F (x - x_0) = m a (x - x_0)}$$

Se $a = \text{cost.}$ consideriamo **leggi del moto uniformemente accelerato**:

$$v = v_0 + a t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Sostituendo il tempo t nella legge oraria:

$$x - x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2}$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$

$$x - x_0 = -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$$

Sostituendo nell'espressione del lavoro:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Principio lavoro-energia:

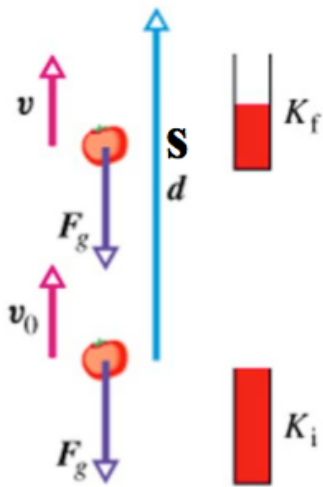
lavoro espresso come variazione dell'energia cinetica.

Il lavoro fatto da una forza agente su un corpo per un certo spostamento è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo in quel dato spostamento.

Si ha **aumento di energia cinetica** (variazione positiva) se la **forza è concorde con il moto** (accelerazione positiva).

Si ha **diminuizione di energia cinetica** (variazione negativa) se la **forza è opposta** al moto (accelerazione negativa).

Esempio: lavoro svolto dalla forza peso (forza costante)



× lancio in aria un **pomodoro** (particella di massa m)

× la velocità diminuisce ($v_0 \rightarrow v$) per effetto della forza peso

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow K_i > K_f$$
$$K_f = \frac{1}{2} m v^2$$

× **lavoro** fatto dalla forza peso [**in salita**]:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = m g s \cos(180^\circ) = -m g s$$

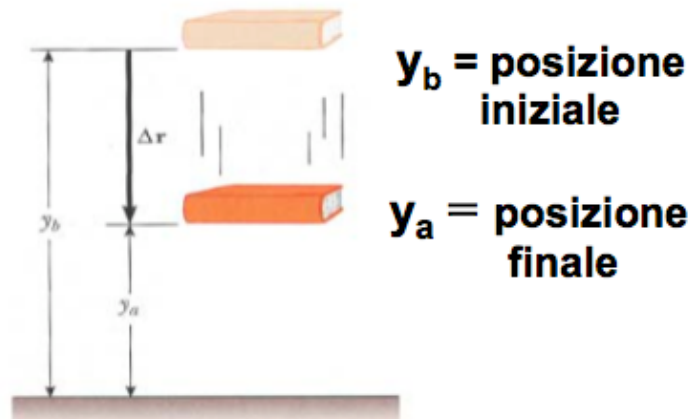
dopo avere raggiunto la **massima elevazione** il corpo cade:

× **lavoro** fatto dalla forza peso [**in discesa**]:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = m g s \cos(0^\circ) = +m g s$$



Studio lavoro svolto da forza peso sul libro quando cade Sistema e' isolato



Lavoro della forza peso sul libro (lavoro di forza costante e parallela allo spostamento Δr):

$$L = mg \Delta r$$

Quindi se corpo cade da altezza h ad arriva ad altezza 0 il lavoro della forza di gravita' e':

$$L = P h = m g h$$

Si ha aumento dell'energia cinetica:

Per teorema dell'energia cinetica si ha $L = \Delta K$:

$$L = P h = m g h = \frac{1}{2} m v^2.$$

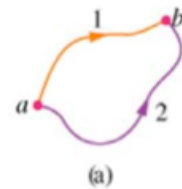
v e' la velocita' dell'oggetto al suolo $\rightarrow v = \sqrt{2gh}$

Definizione forza conservativa

Definizione 1: una **forza** è **conservativa** se

- ✗ il lavoro svolto su una particella dalla forza è **indipendente** dalla **trattoria**
- ✗ dipende solo dal **punto iniziale** e **finale** del percorso

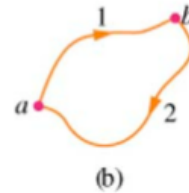
$$L_{ab,1} = L_{ab,2}$$



Definizione 2: una **forza** è **conservativa** se

- ✗ il lavoro svolto su una particella che si muove lungo un **percorso chiuso** è **nullo**

$$L_{ab,1} + L_{ba,2} = 0$$



$$\Rightarrow L_{ab,1} = -L_{ba,2} = L_{ab,2}$$

[**N.B.** mi permette di risolvere problemi complessi, utilizzando percorsi semplici a piacere]

- una forza **conservativa** conserva *energia meccanica*
- non causa *trasformazione di energia meccanica in energia interna del sistema*

La forza gravitazionale e' forza conservativa

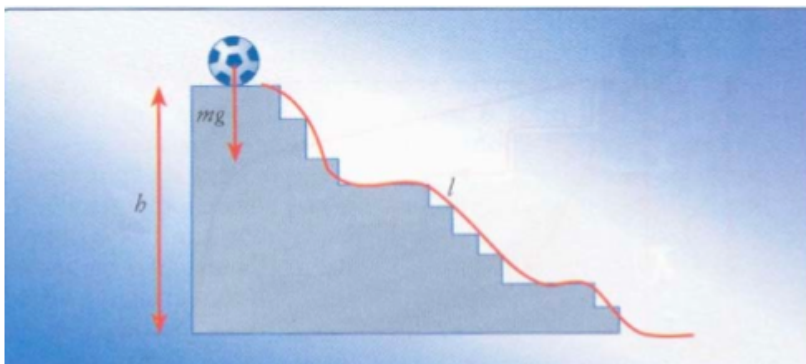
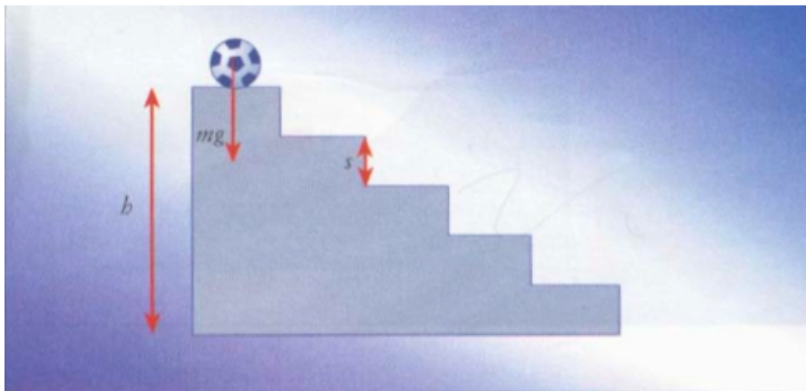
Il lavoro della forza peso NON dipende dal percorso ma solo dal dislivello complessivo.

Se una palla cade lungo una scala la forza peso fa lavoro solo sui tratti verticali (sugli scalini orizzontali il peso e' perpendicolare allo spostamento = lavoro nullo)

Lavoro complessivo e' dato dalla somma dei lavori fatti su ogni salto s

$$L = m g s + m g s + m g s + \dots + m g s = m g h$$

Un qualunque cammino puo' essere scomposto in una scala di minuscoli gradini, quindi lavoro totale e' sempre $L = m g h$ (esempio piano inclinato)



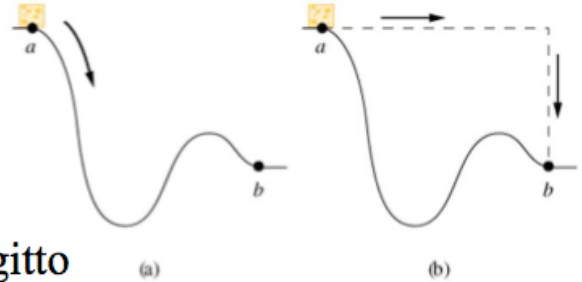
La palla cade lungo una discesa qualsiasi

applicazione: calcolo del lavoro utilizzando percorsi opportuni

corpo che scivola
su superficie senza attrito
da **a** a **b**.

percorre 2.0 m lungo tutto il tragitto
e copre dislivello verticale di 0.80 m.

quanto lavoro compie F_g sul corpo?



NON utilizzo $L = F_g s \cos \theta$ perche' angolo θ cambia in
continuazione

Poiche' forza peso e' conservativa scelgo percorso tratteggiato:

Lavoro orizzontale = 0 perche' $\cos(90^\circ) = 0$

Resta solo lavoro verticale dove $\cos(0^\circ) = 1$

Quindi $L = m g h$ dove h e' dislivello verticale

Se m e' massa di 1.0 kg si ha:

$$L = (1.0 \text{ kg}) (9.8 \text{ m/s}^2) (0.80 \text{ m}) = 7.84 \text{ J}$$

Energia potenziale

***energia potenziale:** energia immagazzinata dal sistema che può essere convertita in energia cinetica o altre forme di energia*

Una forza che compie un lavoro che dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale (e non dal percorso) si dice che è una forza conservativa.

Se una forza è **conservativa** il lavoro per andare da punto A a punto B può essere espresso come differenza dei valori assunti nelle due posizioni da una certa funzione U detta **energia potenziale**:

$$L = U(A) - U(B) = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U$$

Solo per forze conservative ha senso parlare di energia potenziale.

Forza peso, forza gravitazionale, forza elastica, forza elettrica sono forze conservative

Forza di attrito NON è una forza conservativa

Energia potenziale gravitazionale

Supponiamo che un oggetto sia alzato dal suolo (punto 1) ad un'altezza h qualunque (punto 2) → ci deve essere una forza esterna F che agisce contro la forza di gravità

Si può calcolare che lavoro compiuto L_F di una forza esterna F per portare il corpo dal punto 1 al punto 2 (dislivello h) è:
 $L_F = mgh$.

In pratica L_F è il lavoro contro la forza di gravità per innalzare il corpo ad altezza h (dal livello 0 di riferimento)

Energia potenziale gravitazionale U posseduta dal corpo ad altezza h è definita come il lavoro compiuto da una forza esterna F contro la forza peso in un dislivello h :

$$**U = m g h**$$

Il lavoro speso da F contro forza peso è immagazzinato come energia potenziale gravitazionale del corpo

È capacità “potenziale” di un corpo di compiere lavoro in virtù della sua posizione.

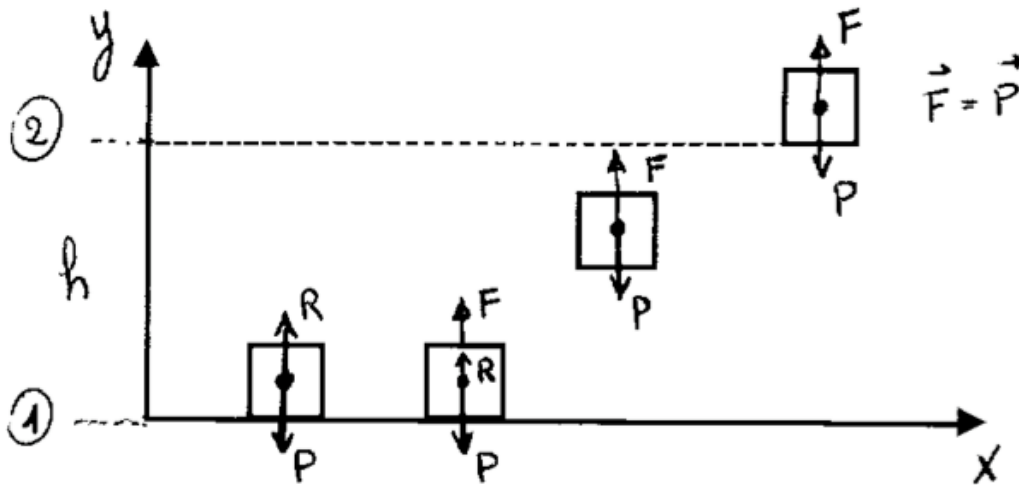
Convenzione naturale è che energia potenziale al suolo è 0.

In realtà la quota di riferimento può essere scelta a qualunque altezza.

Infatti il lavoro fatto contro la forza di gravità dipende dalla differenza della quota di partenza ed di arrivo e non dal valore assoluto, quindi dalla differenza dell'energia potenziale.

Calcolo energia potenziale gravitazionale

Supponiamo che un oggetto sia alzato dal suolo ad un'altezza $h \rightarrow$ ci deve essere una forza esterna F che agisce contro la forza di gravità



- 1) reazione $R = \text{peso } P$
- 2) F aumenta, R diminuisce, ma $F < P$
- 3) $F > P \rightarrow$ il corpo inizia a salire
- 4) F inizia a diminuire $\rightarrow$ all'altezza h si ha $F = P$

Dal momento del distacco a momento in cui corpo arriva ad altezza h la forza agente risultante è verso l'alto e vale : $(F - P)$

**Il corpo parte da fermo (punto 1) ed arriva fermo ad altezza h (punto 2)
 $\rightarrow$ variazione dell'energia cinetica = 0.**

Quindi per il teorema dell'energia cinetica:

$$\text{Lavoro} = \int_1^2 (F - P) dy = 0$$

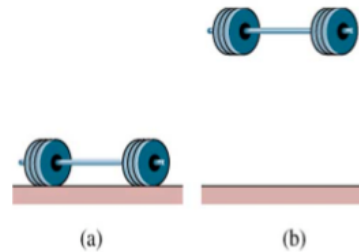
$$\int_1^2 F dy = \int_1^2 P dy = P \int_1^2 dy = Ph = mgh$$

× energia potenziale gravitazionale

*energia associata allo stato di **separazione** tra i corpi che si attirano reciprocamente per effetto della **forza di gravità***

esempio:

sollevando dei pesi
modifico le posizioni
relative del sistema Terra-pesi.
Il lavoro svolto aumenta
**energia potenziale
gravitazionale**



energia potenziale gravitazionale:

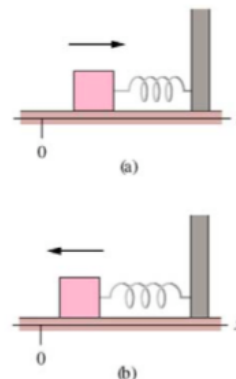
- × dipende da posizione verticale y [quota], rispetto a posizione di riferimento ($y = 0$)
- × non dipende dalla posizione orizzontale

× energia potenziale elastica

*energia associata allo stato di **compressione** o **decompressione** di un sistema elastico [tipo **molla**].
La **forza** in gioco è quella della **molla**.*

esempio:

stirando o comprimendo
una molla cambio le
posizioni relative delle spire
della molla.
Il lavoro svolto aumenta
**energia potenziale
elastica** della molla



Riassumendo:

Sistema Isolato:

3 differenti tecniche per calcolare il lavoro

1 definizione

$$L = \int_{l(A,B)} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

processo di integrazione in più dimensioni
(spesso complesso o
non risolvibile analiticamente)

2 teorema **lavoro - energia cinetica**

(per corpo puntiforme)

$$L = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

banale se si conoscono
velocità iniziale e finale

3 mediante **energia potenziale** (per forze conservative)

$$L = -(U(B) - U(A))$$

devo sapere **solo** ed **esclusivamente**
il valore dell'energia potenziale
nei due punti A e B

Perche' si dice forza conservativa?

Quando un oggetto e' sottoposto a forza conservativa la somma dell'energia potenziale e energia cinetica si mantiene costante

*in un sistema **isolato** in cui agiscono solo **forze conservative**
l'**energia meccanica** di un corpo si **conserva**
in ogni punto della traiettoria*

esempi: conservazione energia meccanica
in una cascata:



← **energia potenziale
gravitazionale**
del sistema acqua – Terra

si converte in

← **energia cinetica** acqua

Conservazione dell'energia meccanica

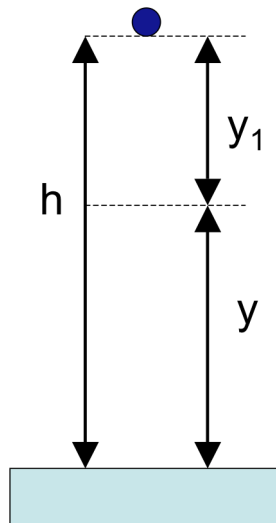
Un corpo cade da fermo da un'altezza h .

Quando si trova al livello generico y dal suolo, lo spostamento y_1 (distanza di caduta dall'altezza h) e':

$$y_1 = (h-y)$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso fino a questo punto e':

$$L = mg y_1 = m g (h-y)$$



Per teorema energia cinetica:

$$L = m g (h-y) = \Delta K = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

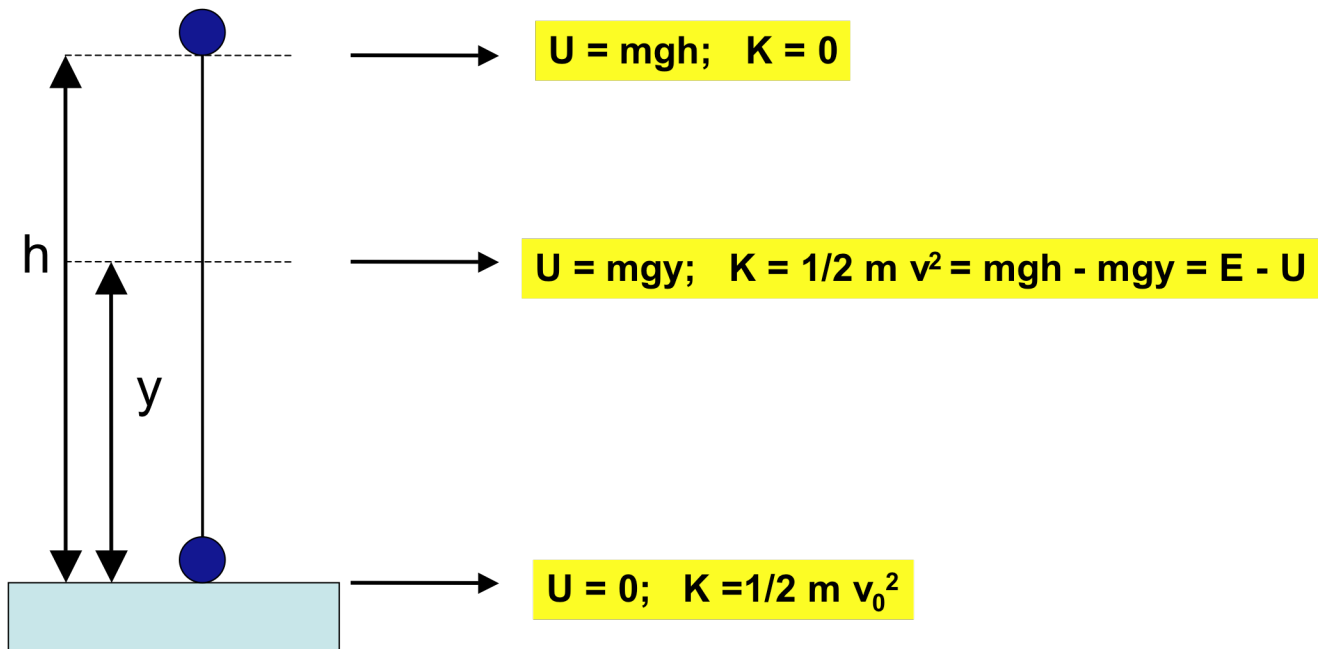
$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h - m g y \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + m g y = m g h$$

energia potenziale ad altezza y e': **$U = m g y$**

Quindi in ogni posizione l'energia meccanica totale E :

$$E = K + U = m g h = \text{costante}$$

Conservazione dell'energia meccanica



Per conservazione energia: **$U + K = E$ (costante)**

Se altezza di caduta e' h , energia totale e' sempre $E = mgh$
Quindi nota altezza h si calcola velocita' al suolo v_0 dove energia potenziale e' 0

$$U + K = \frac{1}{2} m v_0^2 = E = mgh$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Si puo' anche calcolare la velocita' v a qualunque altezza y :

$$U + K = m g y + \frac{1}{2} m v^2 = E = mgh$$

$$v^2 = \frac{2}{m}(E - U)$$

in un salto:

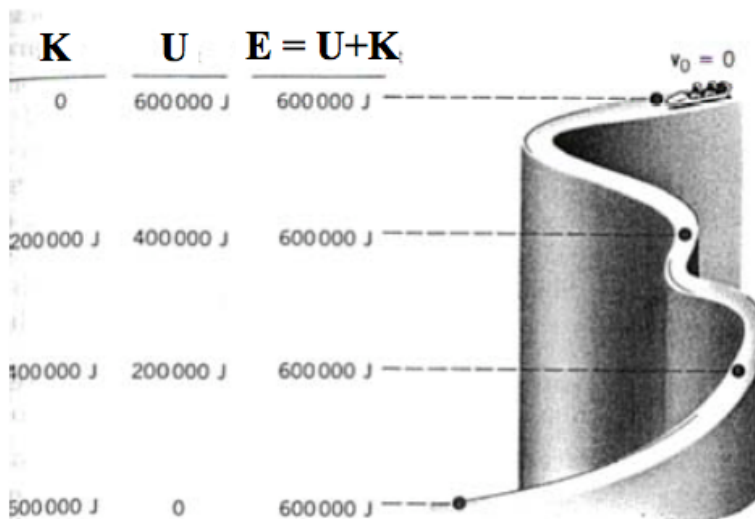
in **salita**:

converto
energia cinetica in
energia potenziale



in **discesa**:

converto
energia potenziale in
energia cinetica



corpo in caduta:

a mano a mano che diminuisce di
quota

- × aumenta **velocità**
- × diminuisce **energia potenziale**

è come se l'energia
potenziale si trasformasse in
energia cinetica

$$E_{mecc} = K + U$$

energia meccanica

Forze NON Conservative

*una forza è **non conservativa** se
il lavoro che compie su un corpo
dipende dal cammino percorso*

o equivalentemente

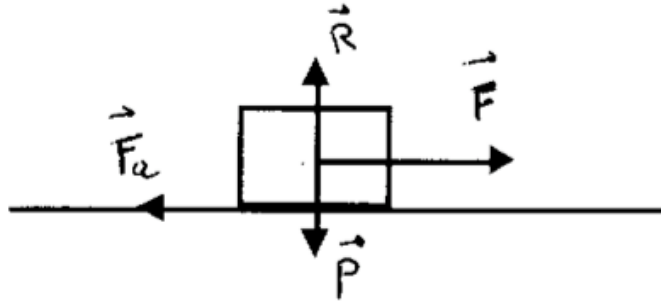
*una forza è **non conservativa** se
dissipa energia meccanica
in **energia interna** al sistema*

esempio:

La forza di **attrito** è **dissipativa**:

- ✗ trasforma energia meccanica in energia termica
[non recupero mai l'energia trasformata in calore]
- ✗ il lavoro fatto dipende dal percorso

Lavoro in presenza di forze di attrito



Vale sempre il **teorema dell'energia cinetica**:

$$W = W_F + W_{Fa} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

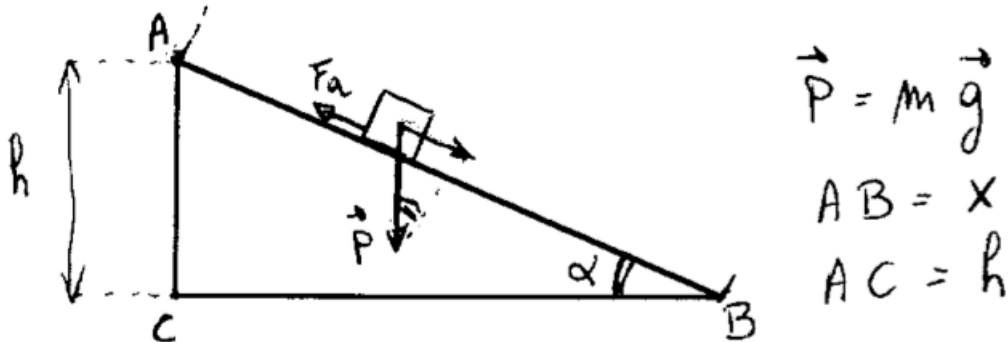
W_{Fa} e' un lavoro negativo perche' la forza di attrito si oppone al moto.

Quindi $W_F + W_{Fa} < W_F$

Quindi la variazione di energia cinetica e' inferiore in presenza di attrito.

Lavoro su piano inclinato

Supponiamo corpo che scende da altezza h lungo piano inclinato lungo x .



Senza attrito il lavoro e':

$$W = m g \sin \alpha x = m g h$$

$m g \sin \alpha$ = componente forza peso lungo piano inclinato

Per teorema energia cinetica e':

$$W = m g h = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Si trova che energia cinetica al suolo e' uguale all'energia potenziale posseduta nel punto di massima altezza h (conservazione dell'energia).

In presenza di attrito il lavoro e':

$$W = m g \sin \alpha x - F_a x = m g h - F_a x$$

Per teorema dell'energia cinetica:

$$W = m g h - F_a x = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Ora l'energia cinetica e' minore dell'energia potenziale $m g h \rightarrow$ energia totale non si conserva.

Al suolo si ha ora un'energia cinetica $\frac{1}{2} m v_1^2$ minore di $\frac{1}{2} m v_0^2$.

La forza di attrito e':

$$F_a = \mu_c R = \mu_c m g \cos \alpha$$