Lezione 14 - 21/10/2025

date esami

	scritto	orale	iscrizioni
	13·1	15·1	15-12 scritto 13-1 orale
	27·1	29·1	13-1 scritto 13-1 orale
	11·2	13·2 - 20·2	27-1 scritto 13-1 orale

su ESSE3 "prova parziale" "ESAMI"

spiegazione delle regole dell'esame

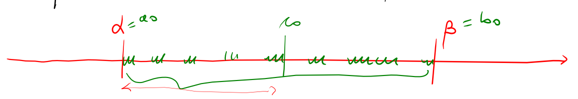
1° Teorema di Bolzano Weierstrass

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme infinito e limitato.
Allora $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$, ξ punto di accumulazione per E.

dim. $E \subseteq \mathbb{R}$

E è limitato cioè ammette estremo inferiore, α, e estremo superiore, β.

quindi $\forall x \in E \quad \alpha \leq x \leq \beta$



chiamo $\alpha = a_0$, $\beta = b_0$

considero $\frac{a_0 + b_0}{2} = c_0$

ho 2 possibilità: o $[a_0, c_0]$ contiene infiniti punti di E
o $[c_0, b_0]$ " " " E

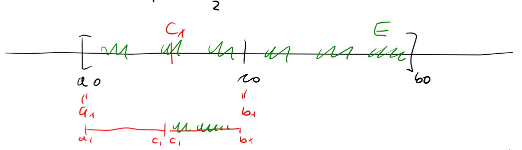
(altrimenti E non sarebbe infinito)

supponiamo che in $[a_0, c_0]$ ci siano infiniti punti di E

chiamo $a_0 = a_1$, $c_0 = b_1$

ho $[a_1, b_1]$ che contiene infiniti punti di E

considero $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$



di nuovo o $[a_1, c_1]$ contiene infiniti punti di E
o $[c_1, b_1]$ " " " "

supponiamo $[c_1, b_1]$ contenga inf. punti di E

chiamo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$

vado avanti così: costruisco una successione di intervalli $([a_n, b_n])_n$ chiusi, limitati, incapsulati e dimezzati e hanno la proprietà di contenere ciascuno infiniti punti di E

Posso applicare il teor. di Cantor forma forte

$\exists\, \xi \in \mathbb{R}: \quad \bigcap_n [a_n, b_n] = \{\xi\}$

Per concludere: provo che ξ è di accumulazione per E

si tratta di provare che in ogni intorno di ξ ci sono infiniti punti di E

prendo $r > 0$ $(\forall r > 0)$

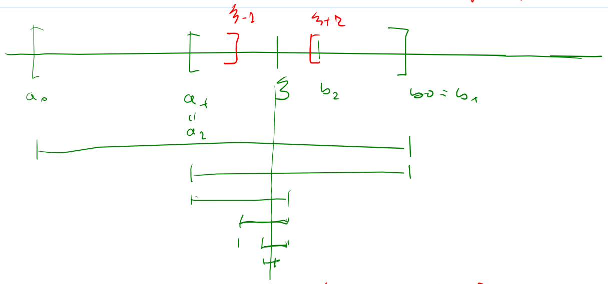
faccio vedere che in $]\xi - r, \xi + r[$ ci sono infiniti punti di E

Per concludere: provo che ξ è di accumulazione per E

si tratta di provare che in ogni intorno di ξ ci sono infiniti punti di E

prendo $r>0$ $(\forall r>0)$

faccio vedere che in $]\xi-r, \xi+r[$ ci sono infiniti punti di E



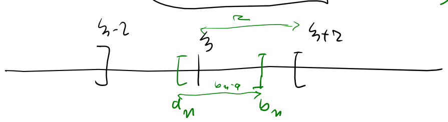
per avere infiniti punti di E in $]\xi-r, \xi+r[$

basta che ci sia un n tale che

$[a_n, b_n] \subseteq]\xi-r, \xi+r[$

quanto vale $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$

la condizione è $\boxed{b_n - a_n < r}$ $\qquad \xi \in [a_n, b_n]$ $\forall n$



basta che $\boxed{\frac{b_0-a_0}{2^n} < r}$ è possibile?

¿ esiste n che va bene?

sì perché $\frac{b_0-a_0}{2^n} < \frac{b_0-a_0}{n}$ (perché $n \le 2^n$ per induzione)

basta che $\frac{b_0-a_0}{n} < r$

è sempre possibile per n abbastanza grande

(lo garantisce l'ordine denso!)

CVD

def. considero $+\infty$ e $-\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$

chiamo intorno di $+\infty$

un qualunque insieme che contenga una semiretta del tipo $]a,+\infty[$

chiamo intorno di $-\infty$

un qualunque insieme che contenga una semiretta del tipo $]-\infty, a[$

dico che $+\infty$ è punto di accumulazione per un insieme E se

ogni intorno di $+\infty$ contiene infiniti punti di E

$-\infty$ è di accumulazione se

ogni intorno di $-\infty$ contiene infiniti punti di E

oss. $+\infty$ è di accumulazione per E

se e solo se E è sup. illimitato

$-\infty$ è di accumulazione per E

se e solo se E inf. illimitato.

es. $\mathbb{N}$ ha $+\infty$ come punto di accumulazione possiamo allora dire che

$$\boxed{\text{in } \mathbb{R} \text{ ogni insieme } E \text{ infinito ha almeno un punto di accumulazione in } \widetilde{\mathbb{R}}}$$

1° BW generalizzato

perché $\longrightarrow$ se E è limitato per 1° BW ha punti di accumulazione in $\mathbb{R}$

se è illimitato allora $+\infty$ o $-\infty$ sono punti di acc. in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Limiti di funzioni

Problema: sia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $\underbrace{x_0 \text{ di accumulazione per } E}_{\text{"vicino a } x_0 \text{ si "accumulano" infiniti punti di } E\text{"}}$

idea $\quad x$ si avvicina a x_0

¿ $f(x)$ si avvicina a qualche valore ?

se $f(x)$ si "avvicina" a L

in che modo lo fa ?

questo probl. è risolto dalla nozione di limite.

def. Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, x_0 di accumulazione per E

Sia $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$ significa

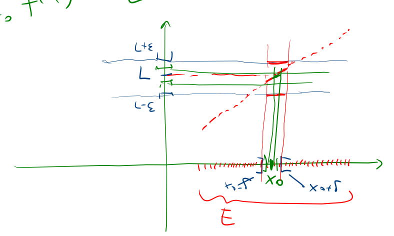
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall V \text{ intorno di } L, \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ \forall x \in E, \quad x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V \end{array}}$$

Esempi

1) $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \underline{x_0 \in \mathbb{R}}$ $\quad x_0$ di acc. per E

$\underline{L \in \mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



$|x - x_0| < \delta$

$\Updownarrow$

$-\delta < x - x_0 < \delta$

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$

$\forall V$ di L

$\exists U$ di x_0

$\forall \in E$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\forall \varepsilon > 0 \quad (V = \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[)$

$\exists \delta > 0 \quad (U = \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[)$

$\forall x \in E$

$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$\varepsilon \longrightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L} \longrightarrow \delta$$

caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$

$\forall V$ di $+\infty$, $\exists U$ di x_0 : $\forall x \in E$,

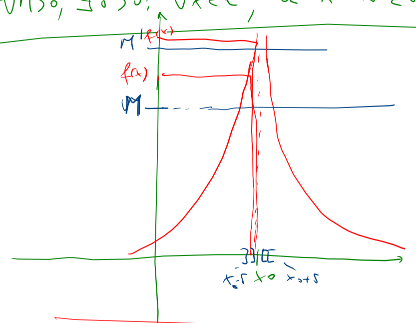
$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\forall M > 0$ $\quad (V =]M, +\infty[)$

$\exists \delta > 0$ $\quad (U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$

$\forall x \in E$, $\quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\boxed{\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M}$



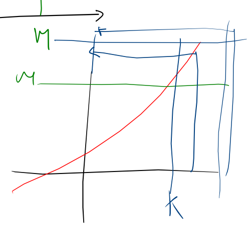
3) $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}}$

$\forall V$ di L, $\exists U$ di $+\infty$: $\forall x \in E$

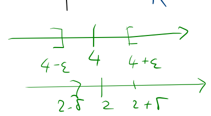
$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in E \quad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$

4) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Esempio $\quad \lim_{x \to 2} x^2 = 4$



$\forall$ intorno V di 4, $\exists$ intorno U di 2 : $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \in U \setminus \{2\} \Rightarrow x^2 \in V$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

¿ se fisso ε, ci sarà un δ che va bene ?

idea $\quad |x^2 - 4|$ deve essere piccolo meno di ε

idea $|x^2-4|$ deve essere piccolo meno di ε

$$\boxed{|x^2-4| = \underbrace{|x-2|}_{<\delta}\,\underbrace{|x+2|}_{<5}}$$

se $\delta < 1$

sapendo che $0<|x-2|<\delta$

$2-\delta$ 2 $2+\delta$

se $\delta < 1$

$1 < x < 3$

$3 < x+2 < 5$

$|x+2| < 5$

se $|x-2|<\delta$ con $\delta<1$

ho che $|x^2-4| < 5\delta$

lo voglio $< \varepsilon$

condizione basta prendere $5\delta < \varepsilon$ $\delta < \varepsilon/5$

se voglio che $|x^2-4| < \frac{1}{1000}$

basta prendere $|x-2| < \frac{1}{5\cdot 1000} = \frac{1}{5000}$