Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 5 - Limiti, continuità, domini - 23/10/2025

Richiamo

Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale per cui se $x \in U$ allora $f(x) \in V$.

N.B.

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$ la definizione è analoga a quella di continuità, infatti se $x_0 \in \operatorname{dom} f$

$$f \text{ è continua in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Se $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$, $l = +\infty$, $l = -\infty$, allora dobbiamo stare attenti a scrivere correttamente gli intorni di $+\infty$ o $-\infty$.

- Se il limite è del tipo $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, dobbiamo prendere solo intorni destri o sinistri di x_0, rispettivamente.

Esercizi

Es. 1

Verificare i seguenti limiti usando la definizione:

i) $\lim_{x \to 1} \log(x) = 0$, ii) $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$, iii) $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

Es. 2

Dimostrare che l'equazione

$$2^x + x = 0$$

ammette esattamente uno zero reale.

Es. 3

Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x}$

ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

iii) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

iv) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$

v) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

vi) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + \cos x\right)$

Es. 4

Calcolare i domini delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \log\left(\sqrt{x+2} - x\right)$

ii) $f(x) = \tan\left(x^3 + 2\right)$

iii) $f(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

iv) $f(x) = \dfrac{x}{4 - 2^{1/x}}$

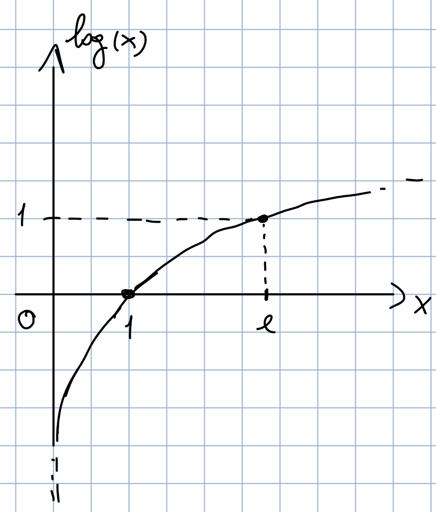
v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2^x}}{\sqrt{4 - 2^x}}$

Svolgimenti

Es. 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \log x$

Ricordiamo che $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$ e tracciamo il grafico →



i) $\lim_{x \to 1} \log x = 0$ vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \left| \log(x) - 0 \right| < \varepsilon$$

Fissato $\varepsilon > 0$ troviamo il δ:

$$|\log(x)| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \log x < \varepsilon$$

$$\iff e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon}$$

$$\iff e^{-\varepsilon} - 1 < x - 1 < e^{\varepsilon} - 1$$

$$\iff x - 1 \in \left(e^{-\varepsilon} - 1, e^{\varepsilon} - 1\right)$$

→ cosa prendiamo come δ? Noi vorremmo qualcosa tipo $x - 1 \in (-\delta, \delta)$, ma $e^{-\varepsilon} - 1 \neq -(e^{\varepsilon} - 1)$

↳ prendiamo il δ più piccolo!

$$\Rightarrow \underline{0 < \delta \leq \min\left\{1 - e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon} - 1\right\}}$$

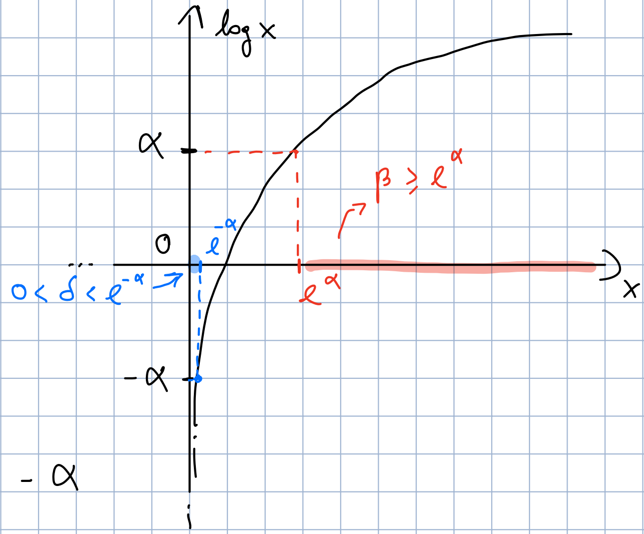
ii) $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ vuol dire che

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \; : \; x > \beta \quad \Rightarrow \log x > \alpha$$

Fissato $\alpha > 0$, cerchiamo β:

$\log x > \alpha \iff x > e^{\alpha}$

$\Rightarrow$ basta dunque prendere $\beta \geq e^{\alpha}$



iii) $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$ vuol dire che

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < x < \delta \Rightarrow \log x < -\alpha$$

Fissato $\alpha > 0$, cerchiamo δ:

$\log x < -\alpha \iff x < e^{-\alpha}$ $\Rightarrow$ basta prendere $0 < \delta \leq e^{-\alpha}$

Es. 2

$$2^x + x = 0$$

Definiamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + x$. È somma di funzioni strettamente crescenti, quindi è strettamente crescente. Inoltre è continua in quanto somma di funzioni continue. Dai limite elementari:

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} 2^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

deduciamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, dunque $\exists x_1 < 0$ tale che $f(x_1) < 0$,

e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, dunque $\exists x_2 > 0$ tale che $f(x_2) > 0$ (per il Teorema della permanenza del segno)

Per il Teorema degli zeri: $\exists \bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Lo zero è unico perché f è strettamente crescente quindi $f(x) < 0$ se $x < \bar{x}$ e $f(x) > 0$ se $x > \bar{x}$.

[N.B. Data la semplicità della funzione, bastava notare che $f(0) = 2^0 + 0 = 1$ e $f(-1) = 2^{-1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ e dedurre che l'unico zero era $\bar{x} \in (-1, 0)$ per il Teorema degli zeri]

Es. 3

i a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - x + 4)}{\cancel{x}(x^4 - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + 4}{x^4 - 1} =$$

forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, non posso dire che il limite è il rapporto dei limiti

non più in forma indeterminata, ora possiamo farne il rapporto

$$= \frac{\lim_{x \to 0} (x^2 - x + 4)}{\lim_{x \to 0} (x^4 - 1)} = \frac{+4}{-1} = -4$$

i b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{4x}{x^3}\right)}{x^{\cancel{5}\,2}\left(1 - \frac{x}{x^5}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^4}} = 0 \cdot 1 = 0$$

ii) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - (1 - x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

iii) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left[\left(\frac{2}{0^+}\right)^2\right] = \left[(+\infty)^2\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left[\left(\frac{2}{0^-}\right)^2\right] = \left[(-\infty)^2\right] = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = +\infty$$

mettiamo questi conti tra parentesi quadre perché non sono rigorosi

iv) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$

ci interessa il limite per $x \to +\infty$

Notiamo che $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow$ per il Teorema del confronto (o dei 2 carabinieri)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

prima risolviamo la forma ind. $[+\infty - \infty]$ Tra parentesi

v) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\cancel{x} + 1 - \cancel{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$

ora mettiamo in evidenza opportunamente per risolvere la forma ind $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

vi) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + \cos x\right)$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq \cos x + \sqrt{x} \leq \sqrt{x} + 1 \quad \forall x \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 1\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + 1\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + \cos x\right) = +\infty$ dal Teorema del confronto

Es. 4

i) $f(x) = \log\left(\sqrt{x+2} - x\right)$

L' argomento del log deve essere >0 e il radicando ≥ 0 :

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \quad (1) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

(1) se $x \geq 0$ possiamo elevare ambo i membri al quadrato, mentre se $x < 0$ la disuguaglianza è verificata perché la radice è sempre positiva. (SE BEN DEFINITA!)

↳ sempre deve essere $x \geq -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 > x^2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 0 \text{ oppure } 0 < x < 2 \Rightarrow -2 \leq x < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} f = [-2, 2)}$$

ii) $f(x) = \tan(x^3 + 2)$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, quindi non è ben definita dove si annulla il coseno ovvero per
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Allora il dominio di f sarà dato da tutte le x tale che

$$x^3 + 2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x^3 \neq \frac{\pi}{2} - 2 + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi} \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

iii) $f(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$

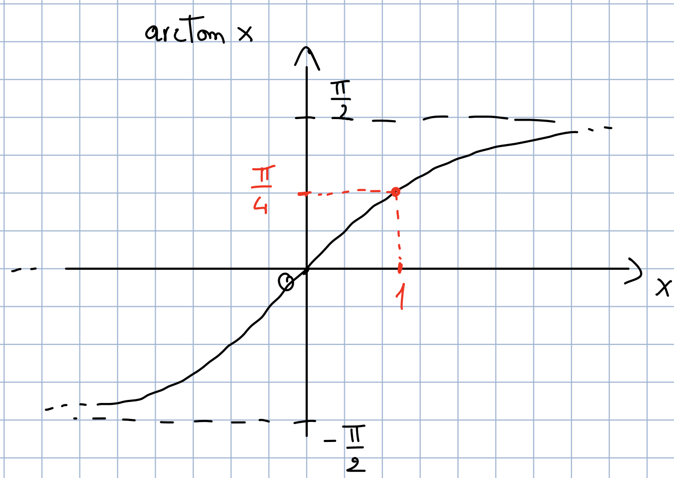
L'arcotangente è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque imponiamo solo

$$\arctan x - \frac{\pi}{4} \geq 0$$

$$\arctan x \geq \frac{\pi}{4}$$

$$x \geq \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} f = [1, +\infty)}$$



iv) $f(x) = \dfrac{x}{4 - 2^{1/x}}$

I denominatori non possono essere nulli, quindi chiediamo

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 4 - 2^{\frac{1}{x}} \neq 0 \end{cases} \longrightarrow 4 \neq 2^{\frac{1}{x}} \iff 2^2 \neq 2^{\frac{1}{x}} \iff 2 \neq \frac{1}{x} \iff x \neq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}}$$

v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - 2^x}}{\sqrt{4 - 2^x}}$

$$\begin{cases} 1 - 2^x \geq 0 \\ 4 - 2^x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^x \leq 1 \\ 2^x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \log(2^x) \leq \log(1) \\ \log(2^x) < \log(2^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \log 2 \leq 0 \\ x \log 2 < 2 \log 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x < 2 \end{cases} \iff x \leq 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 0]}$$