Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 6 - Funzioni composte, inverse, trigonometriche - 27/10/2025

Funzioni composte e inverse

- Ricordiamo che una funzione $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ (si può generalizzare per $f: X \to Y$ con X e Y insiemi qualsiasi) è:

i) iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ii) suriettiva se l'immagine di f coincide con il codominio: $\text{Im}(f) = f(\text{dom} f) = \mathbb{R}$

iii) biiettiva se sia iniettiva che suriettiva

- Sia $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva. Chiamiamo funzione inversa di f, che indichiamo con f^{-1}, la funzione di dominio $\text{Im} f$ e immagine $\text{dom}(f)$ $\left(f^{-1}: \text{Im} f \to \mathbb{R} \text{ e } f^{-1}(\text{Im} f) = \text{dom} f\right)$ che in $y \in \text{Im} f$ ha per valore quell'unico elemento $x \in \text{dom}(f)$ tale che $y = f(x)$.

ESEMPIO

N.B. Non confondere la funzione inversa $f^{-1}(x)$ con la funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$ → sono funzioni DIVERSE

$$f(x) = 2x - 1$$

Fissata $y \in \mathbb{R}$, risolvendo $2x - 1 = y$ rispetto a x troviamo l'unica soluzione $x = (y+1)/2$.

$$\Rightarrow \text{Quindi } f \text{ è biettiva e risulta } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$\boxtimes$

- Date $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ e $g: \text{dom}\, g \to \mathbb{R}$ definiamo le funzioni composte:

i) se $\text{Im} f \subseteq \text{dom}\, g$ possiamo definire $g \circ f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ii) se $\text{Im}\, g \subseteq \text{dom} f$ possiamo definire $f \circ g: \text{dom}\, g \to \mathbb{R}$ tale che $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

ESEMPIO

1) $f(x) = 2x \quad , \quad g(x) = x^2$

$\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ entrambe le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono ben definite:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) = 2x^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2$

2) $f(x) = \log(x-1) \quad , \quad g(x) = e^x$

$\text{dom } f = (1, +\infty) \quad , \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$

$\text{dom } g = \mathbb{R} \quad , \quad \text{Im } g = (0, +\infty)$

$\Rightarrow \text{Im } f \subseteq \text{Im } g$ quindi $g \circ f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è ben definita

ma definita solo per $x > 1$!

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\log(x-1)} = x - 1$$

Invece $\text{Im } g \not\subseteq \text{dom } f$ quindi $f \circ g$ non è ben definita su tutto il dominio di g:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log(g(x) - 1) = \log(e^x - 1)$ $\to$ è ben definita se

$e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

Se definiamo la restrizione $\tilde{g} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = g(x)$ $\forall x > 0$ allora la composizione

$f \circ \tilde{g} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $(f \circ \tilde{g}) = \log(e^x - 1)$ è ben definita

$\boxtimes$

- Data $f : \text{dom } f \to \mathbb{R}$ e $E \subseteq \text{dom } f$ possiamo definire la restrizione di f a E come la funzione $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in E$.

↳ questo ci permette di poter invertire anche funzioni non iniettive, se individuiamo dei sottoinsiemi del dominio $E \subseteq \text{dom} f$ in la restrizione $\tilde{f}$ è iniettiva.

- Dalle definizioni di funzione inversa e composizione segue che

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \qquad \forall x \in \text{dom} f^{-1} = \text{Im} f$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in \text{dom} f = \text{Im} f^{-1}$$

↳ dal punto di vista grafico, il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto la bisettrice del primo e terzo quadrante $(y = x)$

ESEMPIO

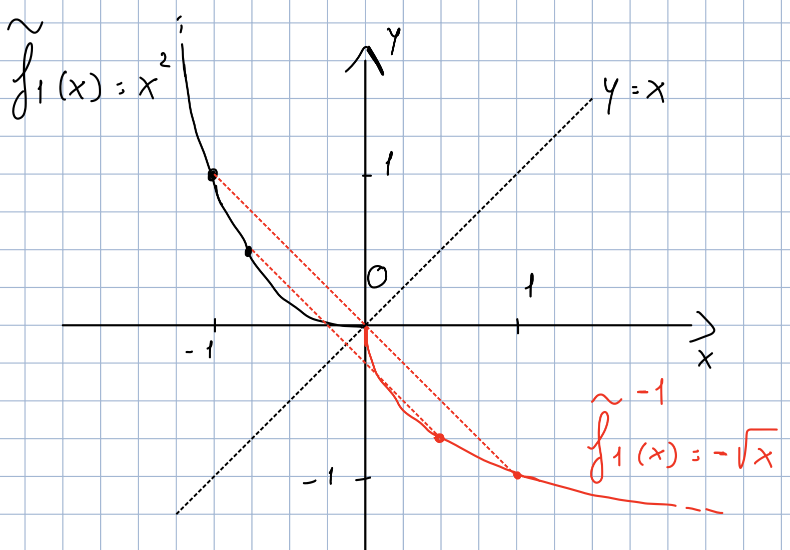
$f(x) = x^2$, $\text{dom} f = \mathbb{R}$, $\text{Im} f = [0, +\infty)$

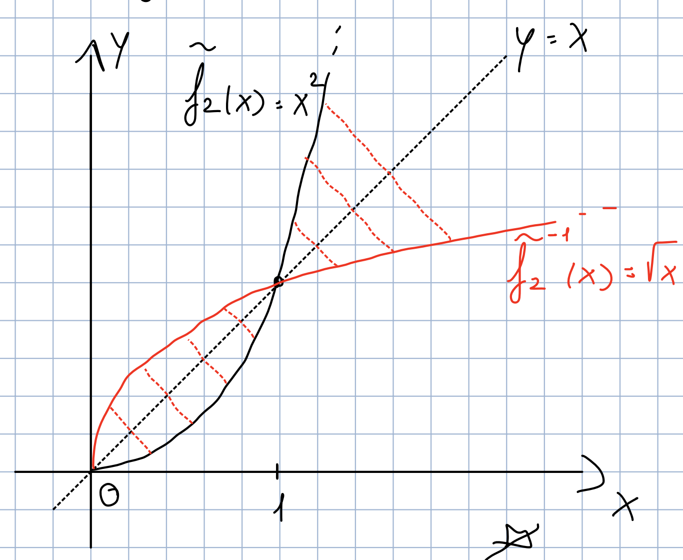
f non è iniettiva perché $f(x_1) = f(x_2)$ se $x_1 = -x_2$. Individuiamo quindi 2 restrizioni $E_1 = (-\infty, 0]$ e $E_2 = [0, +\infty)$ in cui $\tilde{f}_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ e $\tilde{f}_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ sono iniettive e invertibili. Cerchiamo le inverse:

$y = x^2 \Rightarrow$ se $y \geq 0$ allora $|x| = \sqrt{y}$ (se $y < 0$ non esistono soluzioni)

↳ se $x \geq 0$ $(x \in E_2)$ $\Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow \tilde{f}_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$

↳ se $x \leq 0$ $(x \in E_1)$ $\Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow \tilde{f}_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$





Esercizio

Studiamo l'invertibilità di $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

Spezzando il valore assoluto abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} =: \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f_2(x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$$

Per studiare l'invertibilità vediamo se e per quali valori riusciamo a risolvere in x l'equazione:

$$y = \frac{x}{|x|+1} \qquad \text{fissato } y \in \mathbb{R}$$

i) se $x \geq 0 \rightarrow y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow (x+1)y = x \Rightarrow xy - x = -y$

$$\Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow x = -\frac{y}{y-1} = \frac{y}{1-y} \quad \text{se } y \neq 1$$

Inoltre $x \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{1-y} \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y \leq 0 \\ 1-y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y < 1 \end{cases} \text{ oppure } \underbrace{\begin{cases} y \leq 0 \\ y > 1 \end{cases}}_{\text{impossibile}}$$

Dunque l'inversione che porta a scrivere

$$x = \frac{y}{1-y} \quad \text{ha senso se } y \in [0,1)$$

$$\Rightarrow f_1^{-1} : [0,1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ è tale che } f_1^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} = f_2(x)$$

ii) se $x<0 \Rightarrow y=\dfrac{x}{1-x} \Rightarrow (1-x)y = x \Rightarrow -xy-x=-y \Rightarrow x=\dfrac{y}{1+y}$ se $y\neq -1$

La condizione $x<0$ implica $\dfrac{y}{1+y}<0$

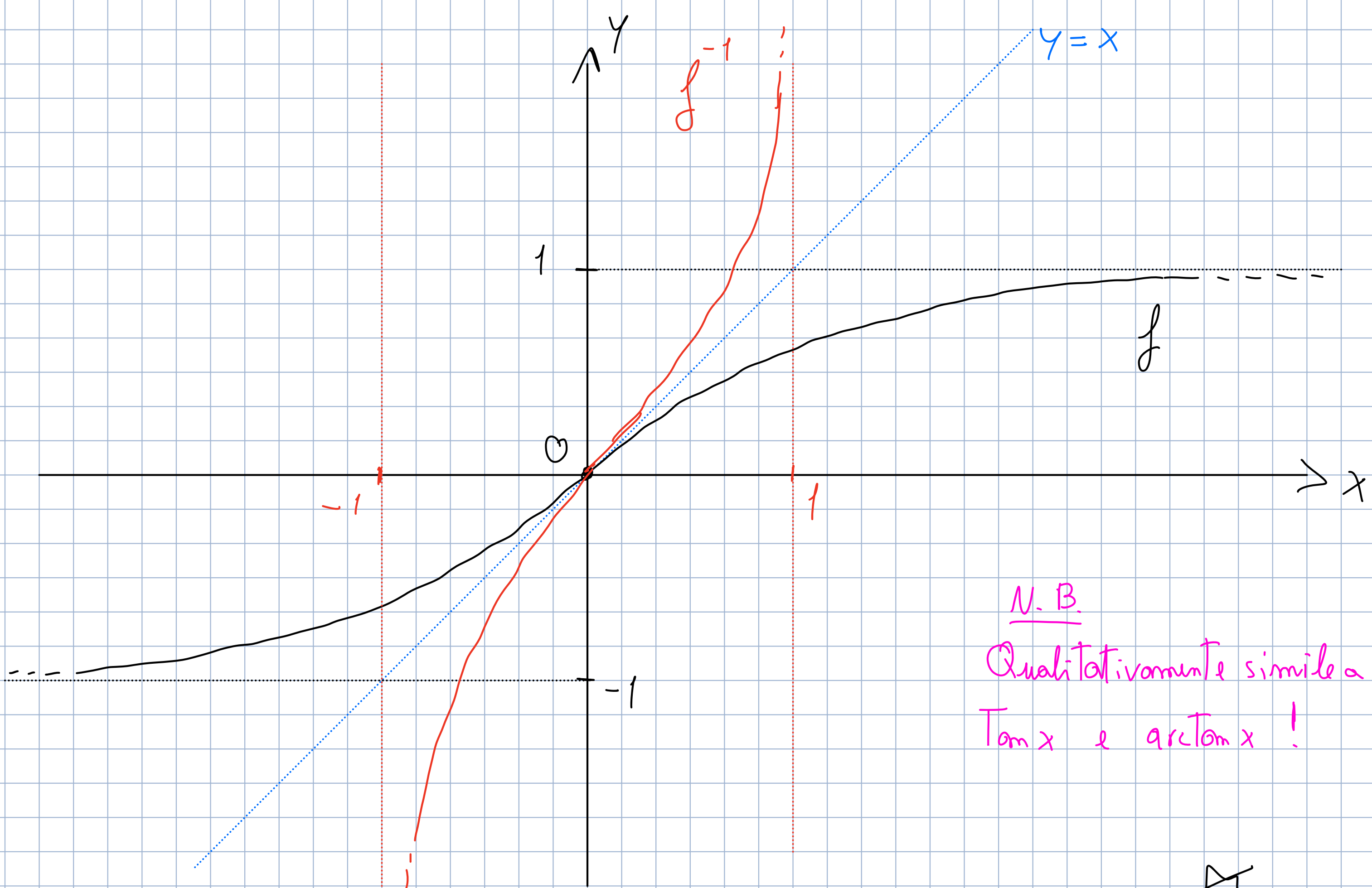
$$\Rightarrow \begin{cases} y>0 \\ 1+y<0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y<0 \\ 1+y>0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} y>0 \\ y<-1 \end{cases}}_{\text{impossibile}} \text{ oppure } \begin{cases} y<0 \\ y>-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_2^{-1} : (-1,0) \to \mathbb{R} \text{ tale che } f_2^{-1}(x) = \frac{x}{1+x} = f_1(x)$$

$\Rightarrow f$ è invertibile e l'inversa è:

$$f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ tale che } f^{-1}(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ f_1(x) & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$

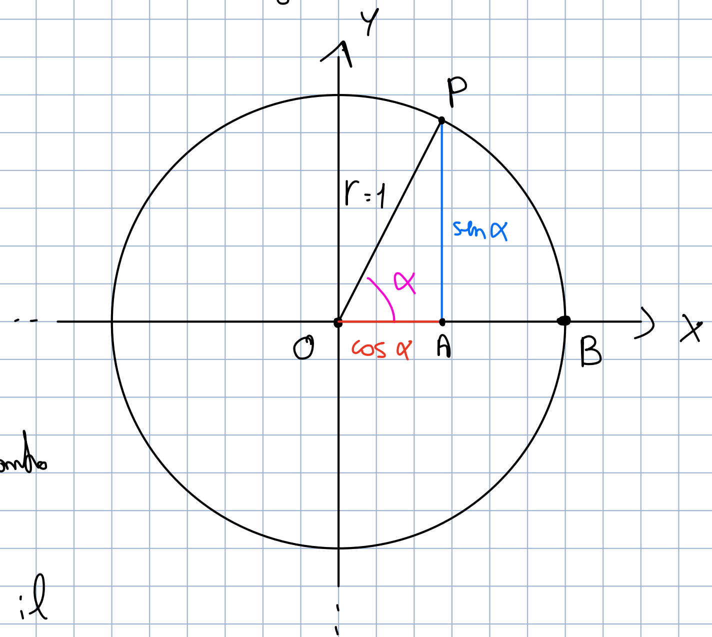
Graficamente possiamo disegnare f e f^{-1} perché riconosciamo che sono pezzi di iperboli:



N.B.
Qualitativamente simile a
$\tan x$ e $\arctan x$!

Trigonometria

- Consideriamo una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine $O=(0,0)$.



Sia $B=(1,0)$. Partendo da B consideriamo un angolo α positivo percorrendo in senso antiorario la circonferenza (l'angolo è invece negativo se la percorriamo in senso orario) e individuiamo il punto P. Tracciamo il segmento $\overline{OP}$ e il segmento $\overline{PA}$ partendo da P e tracciando la verticale fino a intersecare l'asse X.
Individuato anche il segmento $\overline{OA}$, consideriamo il triangolo rettangolo $O\hat{A}P$, con ipotenusa di lunghezza 1.
Definiamo $\cos\alpha$ l'ascissa (coordinata x) di A e $\text{sen}\,\alpha$ l'ordinata (coordinata y) di P.

- Da questa definizione segue che

i) $\alpha = 0 \rightarrow \text{sen}\,0 = 0, \quad \cos 0 = 1$

ii) $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

iii) $\alpha = \pi \rightarrow \text{sen}\,\pi = 0, \quad \cos\pi = -1$

iv) $\alpha = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \text{sen}\,\frac{3}{2}\pi = -1, \quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0$

v) $\alpha = 2\pi \rightarrow \text{sen}\,2\pi = 0, \quad \cos 2\pi = 1$

$\rightarrow$ in questi casi il triangolo $O\hat{A}P$ si riduce a un segmento

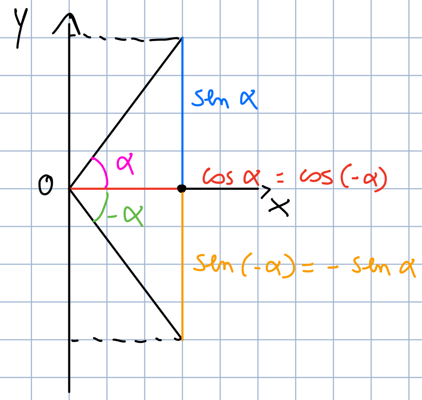
- Sempre dalla definizione segue la periodicità con periodo 2π:

$$\text{sen}(\alpha + 2\pi K) = \text{sen}\,\alpha \quad \forall K \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(\alpha + 2\pi K) = \cos\alpha \quad \forall K \in \mathbb{Z}$$

$\rightarrow$ non importa quanti giri della circonferenza facciamo.

• Se prendiamo l'angolo $-\alpha$ negativo vediamo che

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$



• Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$ allora $\cos\alpha \neq 0$ e possiamo definire

$$\operatorname{Tan}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Si può verificare che la tangente è periodica di periodo π $\Rightarrow \operatorname{Tan}(\alpha + K\pi) = \operatorname{Tan}\alpha \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

Inoltre dalla definizione segue che

$$\operatorname{Tan}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{Tan}\alpha$$

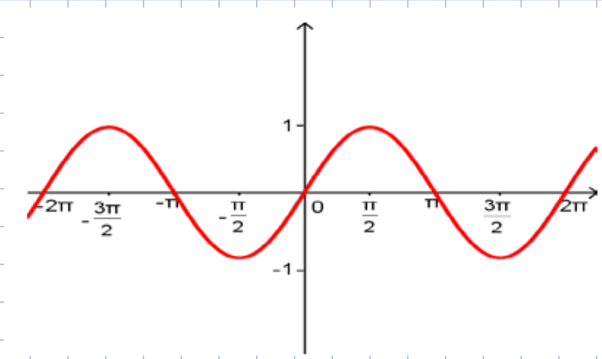
• Per altri valori notevoli di seno, coseno, tangente, definizioni di secante, cosecante, cotangente, formule utili di addizione/sottrazione ecc... consultare il file FORMULE VARIE ANALISI MATEMATICA 1.

Funzioni trigonometriche

Viste le definizioni geometriche, possiamo pensare a seno, coseno, tangente come funzioni:

- $\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to \text{sen}\, x$



$\text{dom} = \mathbb{R}$

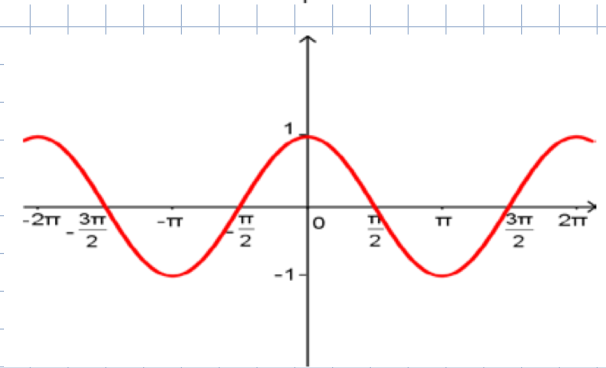
$\text{Im} = [-1, 1]$

Periodo 2π

Dispari $(\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x)$

- $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to \cos x$



$\text{dom} = \mathbb{R}$

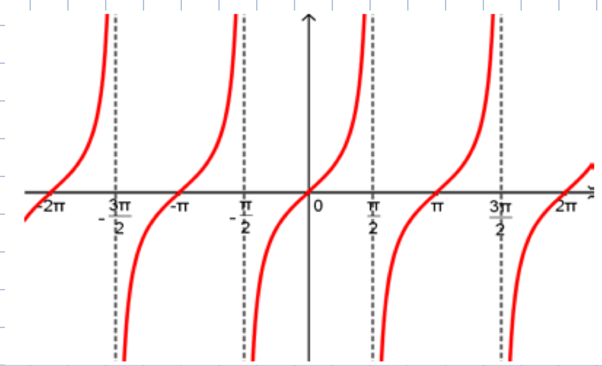
$\text{Im} = [-1, 1]$

Periodo 2π

Pari $(\cos(-x) = \cos x)$

- $\tan: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to \tan x$



$\text{dom} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\text{Im} = \mathbb{R}$

Periodo π

Dispari $(\tan(-x) = -\tan x)$

asintoti verticali:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

N.B.

Si nota che seno e coseno sono effettivamente la stessa funzione traslata. Infatti si ha (tra le varie formule):

$\cos \alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Funzioni trigonometriche inverse

È chiaro che le funzioni trigonometriche non sono iniettive, quindi non invertibili.
Possiamo, come visto, renderle iniettive se ne consideriamo opportune restrizioni. La scelta non è unica, ma quelle standard sono:

- restringere il seno a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$
$$x \to \operatorname{sen} x$$

$\to$ f è iniettiva dunque fissata $y \in [-1,1]$, $\exists! \, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ che soddisfa $y = \operatorname{sen} x$.
Definiamo quest'unica x come $\operatorname{arcsen} y$:

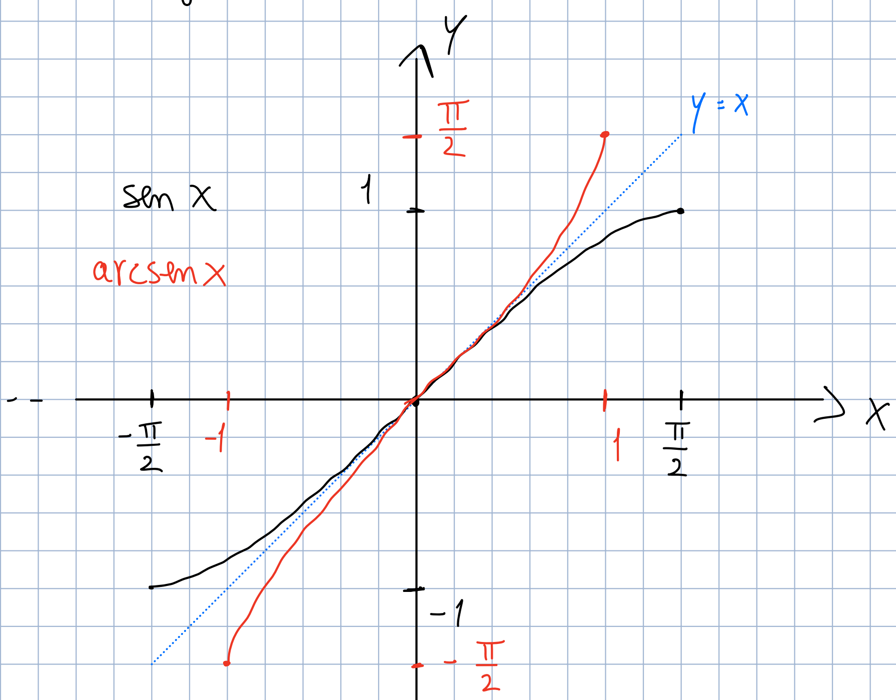
$$y = \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{arcsen} y$$

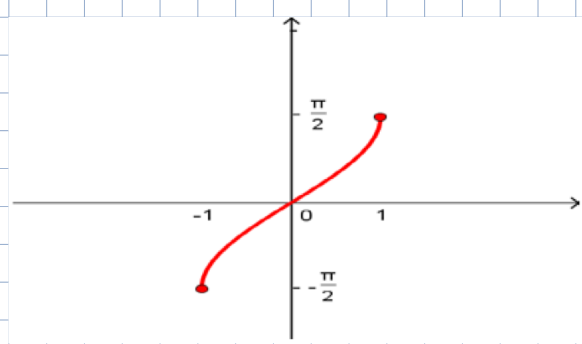
$$(\text{ovvero } \operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x)$$

Abbiamo dunque l'inversa
$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \qquad x \longrightarrow \operatorname{arcsen} x \end{array}}$$

che soddisfa $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$, ovvero $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$

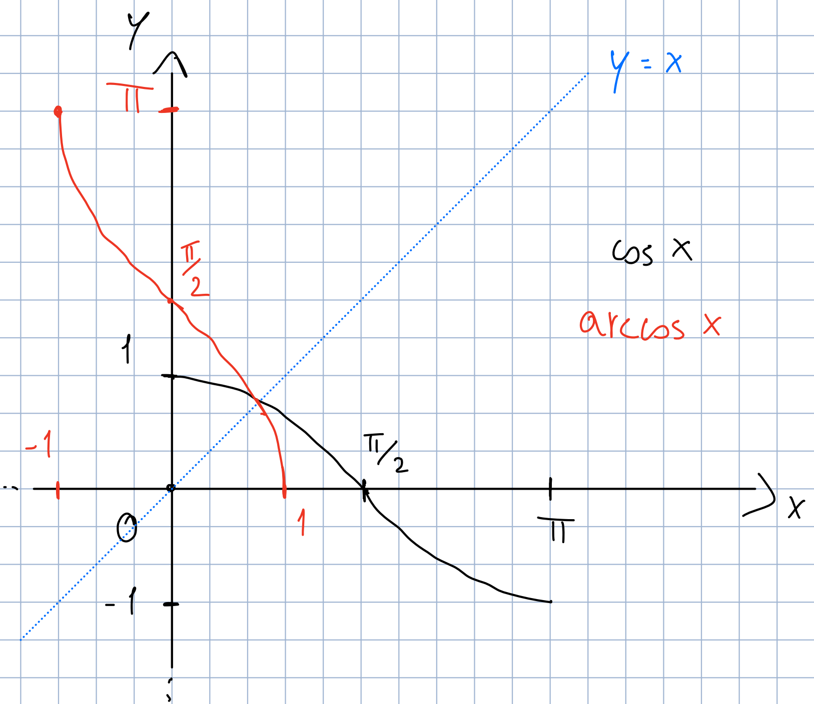
Tracciamo il grafico ribaltando quello del seno rispetto la retta $y = x$:

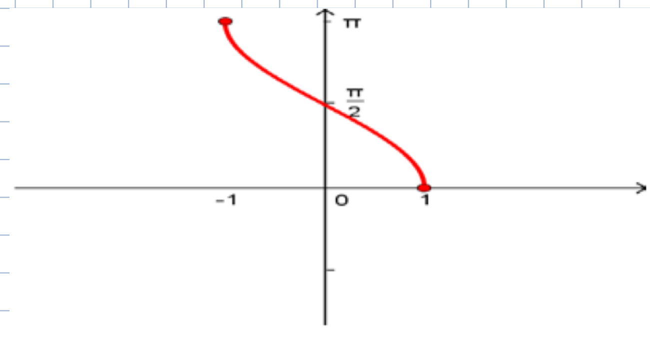




- restringere il coseno a $[0, \pi]$:

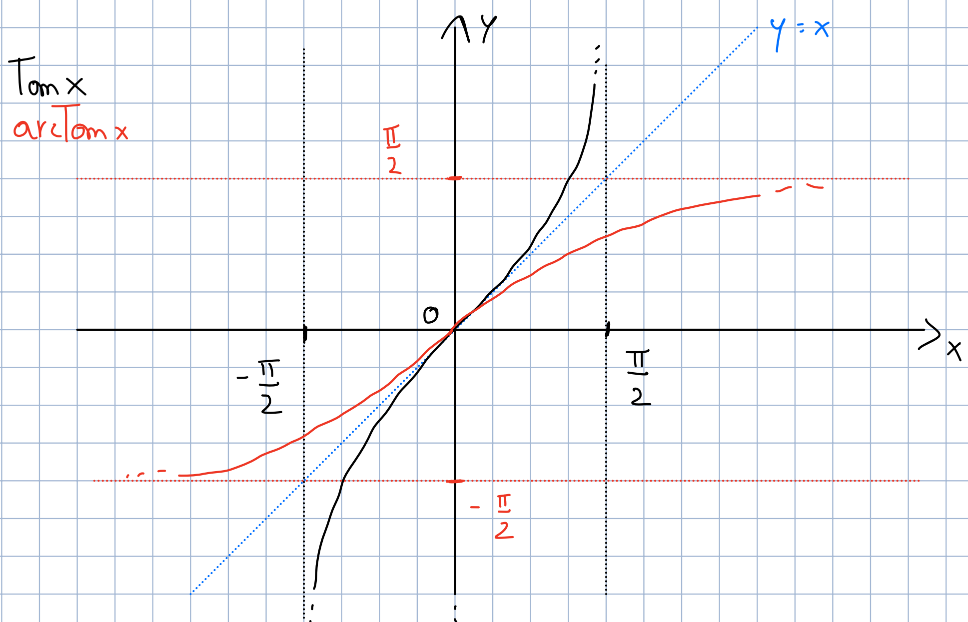
$$f : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \to \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi] \quad x \to \arccos x}$$

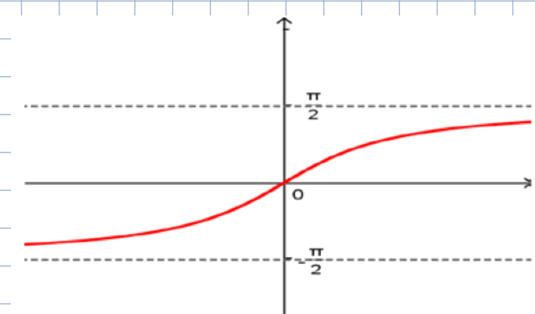




- restringere la tangente a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \qquad x \to \tan x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad x \to \arctan x}$$





- Per valori notevoli e altre proprietà delle funzioni trigonometriche inverse consultare il file FORMULE VARIE ANALISI MATEMATICA 1.