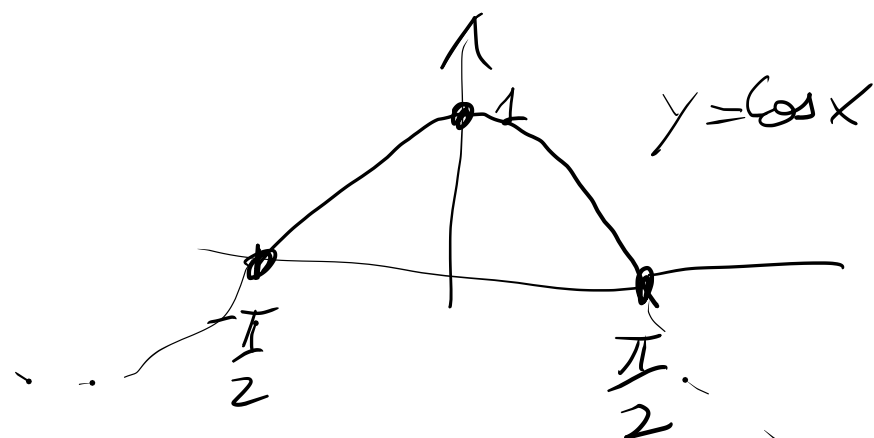


21 ottobre

Qualche limite notevole

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$



Qui

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot 1 = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$$

$$\frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\downarrow x \rightarrow 0$$
$$1$$

$$\frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{2}$$

Limite notevole

Teorema $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

Dim Utilizziamo $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\frac{\lg(1+y)}{y} = \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$y = \frac{1}{x} \quad x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{z \rightarrow e} \lg z = \lg e = 1$$

$z = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

□

Theorem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dim

$$y \doteq e^x - 1$$

$$1 + y = e^x$$

$$\lg(1+y) = \lg e^x = x$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\lg(1+y)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$$

Teorema Sia $a \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad \square$$

Osservazione Per $a=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^0 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$2) \quad a=1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$3) \quad a=2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + 2x + \cancel{x^2} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \left(1 + \frac{x^2}{2x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \left(\cancel{1} + \frac{x}{2}\right)}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2 = a$$

$$3) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j - 1}{x}$$

$$= \frac{\cancel{1} + (nx) + \left(\sum_{j=2}^n \binom{n}{j} x^j\right) \cancel{- 1}}{x}$$

$$= n + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} x^{j-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0}$$

$$n + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} 0^{j-1} = n$$

La derivata.

Def (Rapporto incrementale) Sia $f: X \xrightarrow{\text{TR}} \mathbb{R}$

e siano $x, x_0 \in X$ due punti distinti. Il
rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ viene chiamato rapporto
incrementale di f nei punti x e x_0 .

Se pongo $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

$$\Delta x = x - x_0$$

Co si scrive anche $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$

Esempi

Sia $[t_0, t_1] \ni t \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ la funzione di moto di un punto mobile nella retta $\mathbb{R}$. Il rapporto

incrementale
$$v_m = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$
 e' la

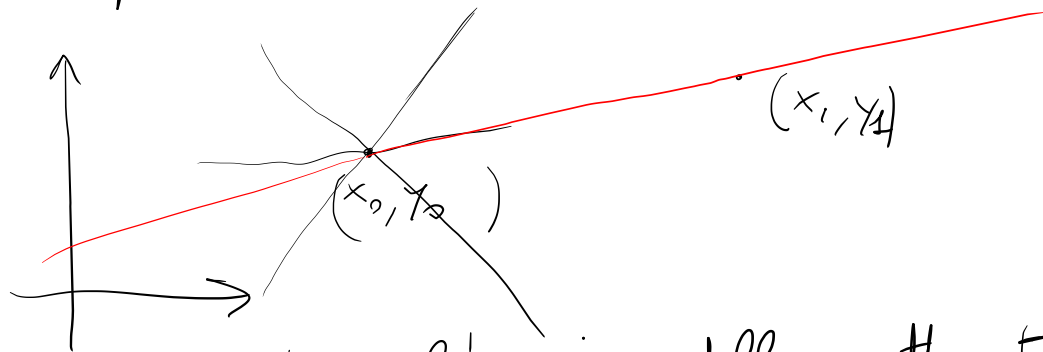
velocità media del moto.

Esempi $[t_0, t_1] \ni t \longrightarrow n(t) \in \mathbb{R}$ sia una funzione che descrive la variazione della ^{una} popolazione

Il tasso medio di crescita e'
$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{n(t_1) - n(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Lemma (Significato geometrico del rapporto incrementale)

Domanda Sono (x_0, y_0) e (x_1, y_1) due punti del piano distinti e con $x_0 \neq x_1$.



Allora l'espressione della retta tra i due punti si ottiene come segue

- 1) Si sceglie uno dei due punti, ad esempio noi scegliamo (x_0, y_0)
- 2) Si scrive la generica retta per (x_0, y_0)
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

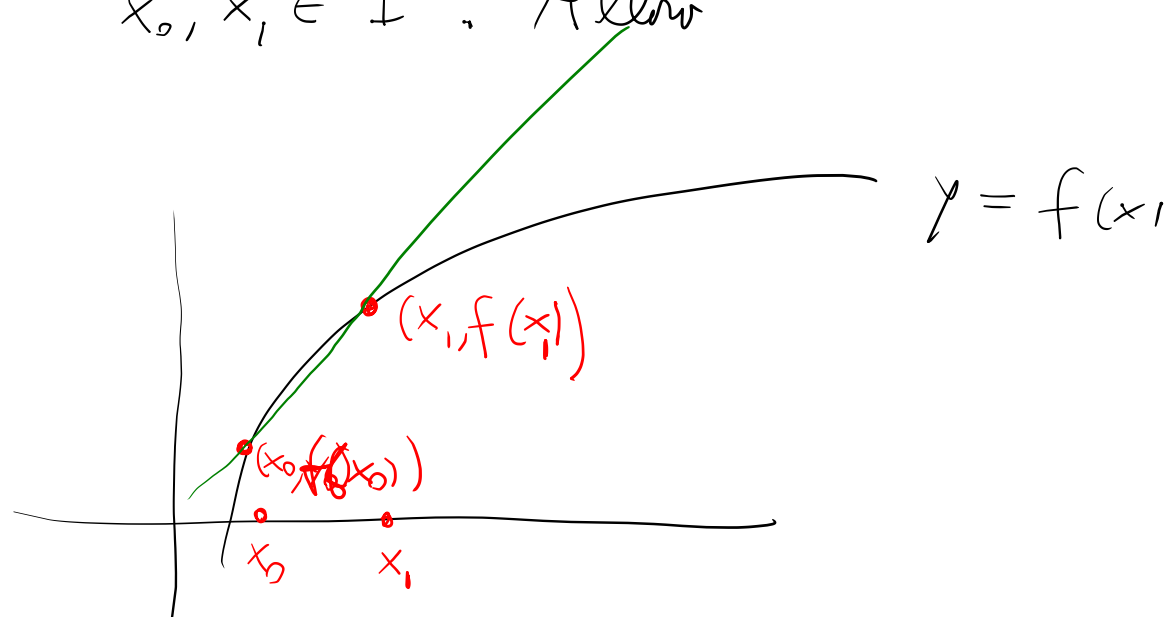
- 3) Si prescrive che la retta passi anche per (x_1, y_1)

$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Lemma (Significato geometrico del rapporto incrementale)

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo
e siano $x_0, x_1 \in I$. Allora



il rapporto incrementale
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

è il coefficiente angolare della retta per i punti

$(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

Def Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I un intervallo aperto
e sia $x_0 \in I$. Se il seguente limite esiste
ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq$$

diciamo che f è derivabile o differenziabile in
 x_0 e il limite lo chiamiamo derivato di
 f nel punto x_0 .

Si denota la derivata $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = f^{(1)}(x_0)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Definizione Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ e supponiamo
 $f'(x_0)$ esista. Allora la retta tangente al
grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$
è la retta di equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

