ALGEBRE DI LIE SEMISEMPLICI

Sia $\mathcal{G}$ alg. di Lie:

- Un sottospazio $\Lambda \subset \mathcal{G}$ t.c. $[\Lambda, \Lambda] \subseteq \Lambda$ è chiamato una SOTTOALGEBRA di LIE di $\mathcal{G}$.

- Un sottospazio $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ t.c. $[\mathcal{I}, \mathcal{G}] \subseteq \mathcal{I}$ è chiamato IDEALE.

  ES. IDEALE: $\underbrace{\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}}_{\text{chiuso sotto } [\,,\,]}$ $\quad \mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ← ideale: $\left[\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t-r) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Se $\mathcal{I}$ è un ideale, $\mathcal{G}/\mathcal{I}$ (quoziente di sp. vett.) è un'alg. di Lie: $\quad$ [In Es: $\mathcal{G}/\mathcal{I} \cong \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$]

  $a \in \mathcal{G}, \; i \in \mathcal{I} \qquad a + i \sim a$

  $$[a+i, b+j] = [a,b] + \underbrace{[i,b] + [a,j] + [i,j]}_{\in \mathcal{I}} \sim [a,b]$$

  → Il prodotto di Lie si estende al quoziente.

- Un esempio canonico di ideale è la SOTTOALG. DERIVATA $\mathcal{D}\mathcal{G}$ di $\mathcal{G}$:

  $$\mathcal{D}\mathcal{G} \equiv \langle [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle = \langle [a,b] \mid a, b \in \mathcal{G} \} \rangle$$

  È chiaro che $[\mathcal{D}\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq \mathcal{D}\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{D}\mathcal{G}$ è un ideale

  (Il quoziente $\mathcal{G}/\mathcal{D}\mathcal{G}$ è un'algebra ABELIANA perché il commutatore sta nella classe 0.)

no

Def. $\quad \mathcal{D}^k\mathcal{G} = [\mathcal{D}^{k-1}\mathcal{G}, \mathcal{D}^{k-1}\mathcal{G}] \quad$ con $\quad \mathcal{D}^1\mathcal{G} \equiv \mathcal{D}\mathcal{G}$.

↳ questo è anche un ideale.

Def.

- $\mathfrak{g}$ è **NILPOTENTE** se $\exists k$ t.c. $\underbrace{[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},[\cdots,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]\cdots]}_{k}=0$

- $\mathfrak{g}$ è **SOLVABLE** se $\mathcal{D}^k\mathfrak{g}=0$ per qualche k.

- $\mathfrak{g}$ è **SEMISEMPLICE** se $\mathfrak{g}$ <u>non</u> contiene ideali solvable ($\neq 0$).

- Es di $\mathfrak{g}$ NILPOT.: matrici $n\times n$ sopra diagonali $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

- Es di $\mathfrak{g}$ SOLVABLE: $\to$ 1) " " triangolari $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

  2) ALG. di LIE delle ROTOTRASLAZIONI sul piano

$$\mathfrak{g}=\left\langle \underset{J}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},\ \underset{T_1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},\ \underset{T_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

le regole di comm. sono

$$[J,T_1]=-T_2 \qquad [J,T_2]=-T_1 \qquad [T_1,T_2]=0$$

Vediamo che in entrambi i casi c'è una SOTTO-ALGEBRA ABELIANA che è un <u>ideale</u>

1) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad$ ($\mathcal{D}^k\mathfrak{g}=0$ $\ k=3$ per matrici 3×3)

2) $\langle T_1, T_2\rangle$ $\quad$ ($\mathcal{D}^k\mathfrak{g}=0$ $\ k=2$)

Note: Se un'alg. è nilpotente, è anche solvable. Per es. se $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]=0$ allora anche $[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]=0$. E $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]]=0 \Rightarrow [[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]],[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]]$
Infatti $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$ e $[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]\subset\mathfrak{g}$.

Aside:

ALG. di LIE delle ROTOTRASLAZIONI sul piano

$$\mathfrak{g} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \right\rangle \qquad (\cdot)$$

↑

Qto si ricava osservando che le ROTO-TRASL. su $\mathbb{R}^2$ possono essere rappr. nel seguente nel seguente modo

$$g(\theta, a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & a_1 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto g(\theta, a_1, a_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y + a_1 \\ -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y + a_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prendo ora curve $\theta(t), a_1(t), a_2(t)$

Allora $v = \left.\dfrac{d g(\theta(t), a_1(t), a_2(t))}{dt}\right|_{t=0}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dot\theta(0) & \dot a_1(0) \\ -\dot\theta(0) & 0 & \dot a_2(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \text{ in } (\cdot)$$

Si può notare che non tutti i $g(\theta, a_1, a_2)$ possono essere scritti come $\exp(\theta J + a_1 T_1 + a_2 T_2)$

(per es. le traslazioni $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$)

↳ qto ha a che fare con il fatto che il gruppo di Lie considerato <u>non</u> è compatto.

- La somma di tutti gli ideali solubili in $\mathfrak{g}$ è un ideale solubile massimale, chiamato RADICAL di $\mathfrak{g}$ e denotato $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

- $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ è semi-semplice $\Rightarrow$ è esatta la seguente

$$0 \longrightarrow \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

- Un'alg. di Lie è semisemplice $\iff$ non ha ideali abeliani $\neq 0$

Dim. $\Rightarrow$: non contiene ideali solubili (alg. ab. sono solubili)

$\Leftarrow$: ipotizziamo per assurdo che $\mathfrak{g}$ non è semisempl. $\Rightarrow$ contiene un ideale solubile $\mathcal{I}$, cioè $\exists k$ t.c. $\mathcal{D}^k \mathcal{I} = 0$; ma allora $\mathcal{D}^{k-1}\mathcal{I}$ è abeliano (ed è un ideale) //

mo

Def.

- $\mathfrak{g}$ è NILPOTENTE se $\exists k$ t.c. $\underbrace{[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},[\dots,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]\dots]}_{k}=0$

- $\mathfrak{g}$ è SEMISEMPLICE se $\mathfrak{g}$ non contiene ideali ABELIANI.

Se $\mathfrak{g}$ non è semisemplice, posso trovare gli ideali abeliani e fare $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$, ottenendo un'alg. senza ideali abeliani, cioè semisemplice.. Se $\mathfrak{g}$ è abeliana, non è semis.

Quindi in un certo senso le alg. di Lie non-abeliane in senso stretto sono gli semisemplici. Una generica alg. di Lie può essere studiata studiando indip. $\mathcal{I}$ e $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$, che fittano nella sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathcal{I} \to 0$$

$\mathfrak{g} = \mathcal{I} \oplus \mathfrak{g}/\mathcal{I}$ come sp. vettoriali scegliendo rappr. in $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$

In pratica, $\mathfrak{g} = \mathcal{I} \oplus \mathfrak{g}/\mathcal{I}$ come sp. vett. in cui $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$ è dato prendendo un elem. per ogni classe di equivalenza. Il prodotto di Lie su $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$ è def. modulo vett. in $\mathcal{I}$.
(Qto splitting può essere fatto ogni volta che si ha un ideale in $\mathfrak{g}$.) (*)

• Un'algebra di Lie $\mathcal{G}$ si dice **SEMPLICE** se $\dim \mathcal{G} > 1$ e non contiene ideali $\neq 0, \mathcal{G}$.

per (*) $\Rightarrow$ un'algebra semi-semplice è isomorfa a una SOMMA DIRETTA di algebre semplici.

Se vogliamo studiare le alg. semi-semplici (come alg. "genuinam. non-abeliane"), i building-block da considerare sono le algebre semplici.

Es: Alg di Lie NON semi-sempl.:

• Consideriamo l'algebra nilpotente $\begin{pmatrix}0&a_1&a_2\\0&0&a_3\\0&0&0\end{pmatrix} = a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3$

con $[E_1,E_2]=E_3$ $\quad [E_1,E_3]=0$ $\quad [E_2,E_3]=0$ $\quad$ (alg. nilpotente)

$\rightsquigarrow$ $\exists$ ideale abeliano $\mathcal{I}=\langle E_3\rangle$.

$\rightsquigarrow$ consideriamo $\mathcal{G}/\mathcal{I}$: otteniamo $\langle E_1,E_2\rangle$ t.c. $[E_1,E_2]\sim 0$

cioè algebra abeliana.

• Consider algebra di Borel $\begin{pmatrix}a_1&b_1&b_2\\0&a_2&b_3\\0&0&a_3\end{pmatrix}$ $\quad \sum_i a_i=0$

$\mathcal{I}=\langle E_3\rangle$ è ancora id. abeliano. $\mathcal{G}'=\mathcal{G}/\mathcal{I}$ ha un ideale abeliano, cioè $\langle E_1,E_2\rangle=\mathcal{I}'$

perché ora $[E_1,E_2]=E_3\sim 0$ e $[L_i,E_j]\propto E_k$.

$\mathcal{G}'/\mathcal{I}'$ = algebra abeliana $\langle L_1,L_2\rangle$.

NOTA: Se $\mathcal{G}$ è semisemplice, allora $\operatorname{tr} \rho_R(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{G}$.
per R generica

Dim. Dimostriamolo per $\mathcal{G}$ semplice (se $\mathcal{G}$ semisempl. $\rho_R(x)$ è somma diretta di matrici di sottoalg. semplici e la tr è la somma delle tr.).

Definiamo $I = \{ a \in \mathcal{G} \mid \operatorname{tr} \rho_R(a) = 0 \} \subseteq \mathcal{G}$:

- I è una sottoalgebra: siano $a, b \in I$ $\operatorname{tr} \rho_R(\alpha a + \beta b) = 0 \Rightarrow \alpha a + \beta b \in I$
  perchè ρ_R e tr sono lineari $\Rightarrow I$ sottosp. vett.
  Inoltre $\operatorname{tr} \rho_R([a,b]) = \operatorname{tr} [\rho_R(a), \rho_R(b)] = 0$ $\left(\begin{array}{c} \operatorname{tr}(AB-BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 \\ \text{per ciclicità traccia} \end{array} \right)$
  $\Rightarrow I$ è sottoalgebra.
- $I \subseteq \mathcal{G}$ è un IDEALE $\rightarrow$ devo dim. che $[a,x] \in I$ se $a \in I$ e $x \in \mathcal{G}$; ciò avviene perchè $\operatorname{tr} \rho_R([a,x]) = \operatorname{tr}[\rho_R(a), \rho_R(x)] = 0$.
- $\mathcal{D}\mathcal{G} = \langle [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle \subseteq I$ perchè $\operatorname{tr} \rho_R([x,y]) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{G}$.
- Se $\mathcal{G}$ è semplice, non ha ideali propri. Ma $\mathcal{D}\mathcal{G} \neq 0$ è un ideale $\Rightarrow \mathcal{D}\mathcal{G} = \mathcal{G}$.
- $\mathcal{D}\mathcal{G} \subseteq I \subseteq \mathcal{G}$ e $\mathcal{D}\mathcal{G} = \mathcal{G} \Rightarrow I = \mathcal{G}$. //

Forma di Killing

Sull' alg. di Lie $\mathcal{G}$ può essere introdotta una forma bilineare simmetrica (un prodotto scalare) chiamata KILLING FORM e def. da

$$k(a,b) = \frac{1}{2\gamma} \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}(a) \operatorname{ad}(b) \right)$$

normalization constant γ will be fixed later on

Vale la seguente proprietà (segue dalla definizione e ciclicità della traccia).

$$k([a,b],c) = -k(b,[a,c]) \qquad (\circ)$$

anche $k([a,b],c) = k(a,[b,c])$

o alternativamente

$$k(\operatorname{ad}(a)b, c) = -k(b, \operatorname{ad}(a)c)$$

Inoltre vale il seguente risultato importante:

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ è semi-semplice se e solo se } k \text{ è NON-DEGENERE}}$$

Dim.

($\Leftarrow$) Assumiamo che k sia non-deg. Se $\mathcal{G}$ non fosse semisemp. allora avrebbe un ideale abeliano A.

Mostriamo che $A \neq 0$ dovrebbe stare nel nucleo di k, rendendola deg.

se $a \in \mathcal{G}$, $b \in A$ $\Rightarrow$ $\operatorname{ad}(a)$ è una mappa lineare che preserva A, mentre $\operatorname{ad}(b): \mathcal{G} \to A$, perché elem. di un ideale; inoltre $\operatorname{ad}(b)|_A = 0$.

$\Rightarrow$ $\underbrace{\operatorname{ad}(a)\operatorname{ad}(b)}_{M}$ mappa $\mathcal{G}$ in A e $\operatorname{ad}(a)\operatorname{ad}(b)|_A = 0$

$$M = \begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \Big\} A \quad \Rightarrow \operatorname{tr} M = 0 \Rightarrow k(a,b) = 0 \ \forall b \in A.$$

($\Rightarrow$) Se k fosse deg., avrebbe un nucleo A non-banale.

Se $a \in A$, $b, c \in \mathfrak{g}$ $k(b,[c,a]) = k([b,c],a) = 0 \Rightarrow [a,c] \in A \;\; \forall a \in A, c \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow A$ è un IDEALE.

Consideriamo gli elem. $ad(A)$, essi formano un'alg. di Lie

con $tr(ad(a)\,ad(b)) = 0 \quad \forall ad(a), ad(b) \in ad(A) \xRightarrow{\text{Cartan's criteria}} ad(A)$ è SOLVABLE

$\Rightarrow A$ è SOLVABLE. //

Questa parte della dim. richiede dim. altri teoremi.

Possiamo ricavare le cost. di struttura da:

$$k([T^a,T^b],T^c) = f^{ab}{}_d \underbrace{k(T^d,T^c)}_{\equiv k^{dc}} \qquad (\star)$$

Matrice associata alla forma quadratica una volta scelta la base

$\rightarrow$ Definiamo $f^{abc} = f^{ab}{}_d\, k^{dc}$

$$\Rightarrow \quad k([T^a,T^b],T^c] = f^{abc}$$

Usando (o) vediamo che

$$f^{abc} = k([T^a,T^b],T^c) = -k(T^b,[T^a,T^c]) = -k([T^a,T^c],T^b) =$$

$$= -f^{acb}$$

$\Longrightarrow f^{abc}$ è totalm. antisimm. nei suoi 3 indici.

- Se k è non-degenere (alg. semi-semplice) e $\mathfrak{g}$ è $\mathbb{C}$-sp. vett

  $\Rightarrow$ posso trovare una base t.c. $k^{ab} = \delta^{ab}$

  Inoltre posso def. l'inversa k_{ab} che si usa per abbassare indici.

  È per qto che spesso non si fa attenzione a mettere indici alti o bassi nelle cost. di struttura.

"ALGEBRA DEI MOMENTI ANGOLARI"

Consideriamo un'algebra di Lie 3-dim. i cui generatori soddisfino

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}\,T^c \,. \qquad (*)$$

Vedremo che già compare come l'alg. di Lie (reale o complessa) di diversi gruppi.

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det M = 1 \}$$

- Qual è la sua alg. di Lie?

  Consideriamo una curva $M(t) = e^{tA} \Rightarrow A = \left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} \in \mathfrak{g}$

  Imponiamo $\det M(t) = 1 \quad \forall t \Rightarrow \mathrm{tr}\,A = 0$

  $$\Rightarrow \quad \mathfrak{g}_{SL(2,\mathbb{C})} \equiv \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}\,A = 0 \}$$

- Possiamo scegliere la seguente base di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

  $$J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\rightarrow$ essi generano $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ come uno sp. vett. 3dim. sul campo $\mathbb{C}$.

Nota: $\left(\frac{J_+ + J_-}{2},\ -\frac{i}{2}(J_+ - J_-),\ J_3 \right)$ soddisfano regole di comm. $(*)$

$SL(2,\mathbb{R}) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$

- Il conto sopra non cambia e abbiamo

$$\mathfrak{g}_{SL(2,\mathbb{R})} = sl(2,\mathbb{R}) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \}$$

- I generatori $J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$ $J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
sono matrici traceless REALI e generano $sl(2,\mathbb{R})$ come sp. vett. sul campo $\mathbb{R}$.

- $sl(2,\mathbb{R}) \subset sl(2,\mathbb{C})$ → l'inclusione anche nel senso che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (coeff. ristretti a num. reali)
→ qta restrizione è chiamata una FORMA REALE.

$SU(2) = \{ M \in M_2(\mathbb{C}) \mid MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbb{1} \text{ e } \det M = 1 \}$

- Sappiamo già che

$$\mathfrak{g}_{SU(2)} = su(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^\dagger = A \text{ e } \operatorname{tr} A = 0 \}$$

- Set di generatori:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $su(2)$ è dato da combinazioni REALI di $J_{1,2,3}$.

- D'altra parte, sul campo complesso $J_\pm = J_1 \pm i J_2$
→ $su(2)$ è un'altra FORMA REALE di $sl(2,\mathbb{C})$.

Quando esponentiamo $sl(2,\mathbb{C})$, abbiamo

$$M = \exp(\beta_3 J_3 + \beta_+ J_+ + \beta_- J_-) \in SL(2,\mathbb{C}) \quad \text{con } \beta_3, \beta_+, \beta_- \in \mathbb{C}$$

- Vediamo che se ci restringiamo a

$$\beta_3 = \alpha_3, \quad \beta_+ = \alpha_+, \quad \beta_- = \alpha_- \qquad \text{con } \alpha_3, \alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{R}$$

otteniamo

$$M = \exp(\alpha_3 J_3 + \alpha_+ J_+ + \alpha_- J_-) \in SL(2,\mathbb{R}) \qquad \alpha_3, \alpha_+, \alpha_- \in \mathbb{R}$$

- Se invece ci restringiamo a

$$\beta_3 = \alpha_3, \quad \beta_+ = \frac{\alpha_1 - i\alpha_2}{2}, \quad \beta_- = \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{2} \qquad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

otteniamo

$$M = \exp(\alpha_3 J_3 + \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2) \in SU(2) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Se troviamo delle matrici che rappresentano $J_\pm, J_3$ in V_R, poi prendendo le opportune combinaz. possiamo ottenere la rap. di $sl(2,\mathbb{C})$, $sl(2,\mathbb{R})$, $su(2)$ e per esponenziazione di $SL(2,\mathbb{C})$, $SL(2,\mathbb{R})$, $SU(2)$.

$\downarrow$

Studieremo le rep. di $sl(2,\mathbb{C})$, visto che poi da essa si generano le rap. di tutte le forme reali per opportune restrizioni.

(Ricordiamo che $su(2)$ ha stesse rep di $sl(2,\mathbb{C})$).