# Calcolare $A^{-1}$ tramite Gauß

Sia $A \in M_n(K)$. Quindi una matrice **QUADRATA**! (**Non ha senso cercare di invertire una matrice non quadrata in uno spazio di matrici con n. di righe e colonne fissato**).

Allora se $A$ è invertibile, cioè $\exists B \in M_n(K) : AB = I_n = BA$, MATR. IDENTITÀ

allora abbiamo che $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{e}_i$ BASE CANONICA di $K^n$ per la def di prodotto riga per colonne. Se consideriamo questo come un sistema lineare

$$\mathbf{A} \cdot x = \mathbf{b}$$

uguale ad A sopra

lo scegliamo come $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← Posto i-esimo

Allora significa che $\mathbf{B}^{(i)}$ è una soluzione. Inoltre, per il teorema fondam. dell'algebra lineare, $b$ è una combinaz.

lineare delle colonne di A. Questo perché il sistema è compatibile, dato che $B^{(i)}$ è una sua soluzione (quindi ne abbiamo trovata almeno una). Quindi:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

perciò $\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n) \subseteq \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.

Ma $\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n) = K^n$ CHIARAMENTE, ANZI È UNA BASE, ANZI È LA BASE CANONICA.

Quindi:

$$K^n \subseteq \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^n$$

E perciò $\mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = K^n$, che in particolare ha DIMENSIONE UGUALE ad $n$, e quindi abbiamo ottenuto:

$A$ INVERTIBILE $\in M_n(K)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$ ← CIOÈ IL RANGO MASSIMO POSSIBILE!

Per il teorema di **Rouché - Capelli**, lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\mathbf{A \cdot x = e_i}$$

come spazio affine ha dimensione $= n - \text{rank}(A) = 0$

$m = n$ perché $A$ quadrata

$\text{rank}(A) = n$

**Quindi $A \cdot x = e_i$ ha un'unica soluzione $v_i$!**

Prendiamo la collezione di tutte le soluzioni $v_i$, una per ogni sistema lineare $A \cdot x = e_i$ per $i = 1, \dots, n$, e definiamo la matrice **$B$ come la matrice che ha i vettori $v_i =: B^{(i)}$ come vettori colonna.**

Allora automaticamente (cioè per **costruzione**) si ha che

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

ovvero $B = A^{-1}$

**$\mathcal{Q}$: Ma come possiamo risolvere questi sistemi lineari**

$$A \cdot x = e_i \qquad i = 1, \dots, n$$

**comodamente e possibilmente simultaneamente?**

R: Un modo c'è. Si può considerare la matrice

CORRISPONDE AL SISTEMA $A \cdot x = e_i$

$$(A \mid I_n) \in M_{n \times 2n}(K)$$

$$\Big\downarrow \text{Gauß}$$

SOLO OPERAZIONI ELEMENTARI CHE QUINDI PRESERVANO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA

CORRISPONDE AL SISTEMA $I_n \cdot x = B^{(i)}$

$$(I_n \mid B) \in M_{n \times 2n}(K)$$

E quindi $B = A^{-1}$ ottenuto in modo COSTRUTTIVO e ALGORITMICO

**Esempio:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Dopo aver verificato che $\operatorname{rank}(A) = 3$ e quindi che $\exists A^{-1}$, procediamo a calcolare l'inversa.

PER ESEMPIO RISOLVENDO UN SISTEMA LINEARE

Consideriamo $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ e applichiamo Gauß

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 3R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 4R_1}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - \frac{3}{2}R_2}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{R_3 \mapsto -\frac{2}{25} \cdot R_3}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-6}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{25} \end{array}\right)
$$

"ORA TORNO INDIETRO"!

$$
\xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 13R_3]{R_1 \mapsto R_1 + 3R_3}
\frac{1}{25}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 25 & 50 & 0 & 7 & 9 & -6 \\ 0 & -50 & 0 & -22 & -14 & 26 \\ 0 & 0 & 25 & -6 & 3 & -2 \end{array}\right)
\xrightarrow[R_2 \mapsto -\frac{1}{2} R_2]{R_1 \mapsto R_1 + R_2}
\frac{1}{25}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 25 & 0 & 0 & -15 & -5 & 20 \\ 0 & 25 & 0 & 11 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 25 & -6 & 3 & -2 \end{array}\right)
$$

ABBIAMO FATTORIZZATO FUORI LO SCALARE $\frac{1}{25}$ PER SEMPLICITÀ

$$
= \left( I_3 \mid B \right)
$$

for $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & -1/5 & 4/5 \\ 11/25 & 7/25 & -13/25 \\ -6/25 & 3/25 & -2/25 \end{pmatrix}$

**Esercizio:** calcolare $B \cdot A$ e $A \cdot B$ e verificare che si ottiene la matrice identità $I_3$ in entrambi i casi.