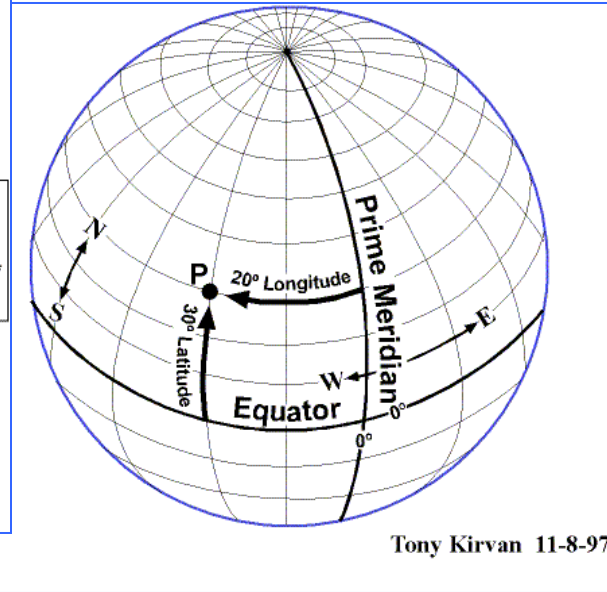
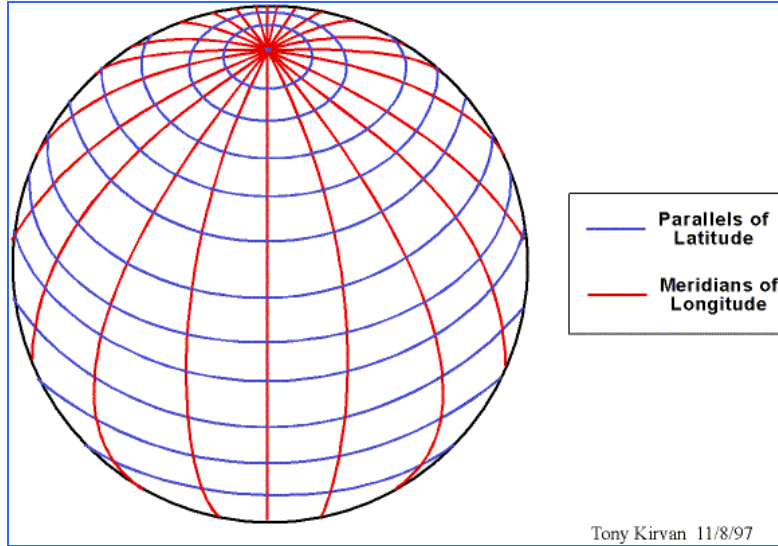

Geometria di un satellite

- Sfera Celeste
- Sistemi di Coordinate
- Studio Eclissi
- Geometria Terra / Satellite

SMAD Chapter 5 p. 95

Sfera Celeste 1/2



azimuth

(longitude ℓ)

elevazione

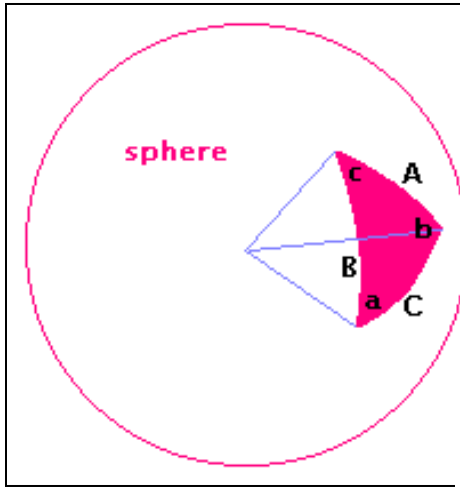
(latitude λ)

$$x = \cos \ell \cos \lambda$$

$$y = \sin \ell \cos \lambda$$

$$z = \sin \lambda$$

Sfera Celeste 2/2



A spherical triangle consists of Great Circle Arcs, extending from the sphere's center, forming Great Circle Angles. Relations among arcs and angles are:

$$\cos(A) = \cos(B) \cos(C) + \sin(B) \sin(C) \cos(a)$$

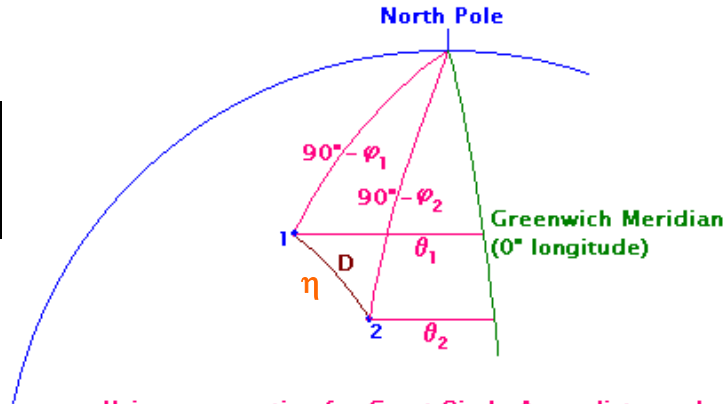
$$\cos(a) = -\cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A)$$

$$\sin(A)/\sin(a) = \sin(B)/\sin(b) = \sin(C)/\sin(c)$$

SMAD Appendix D
Table D-3 p. 907

φ_1, φ_2 elevazione

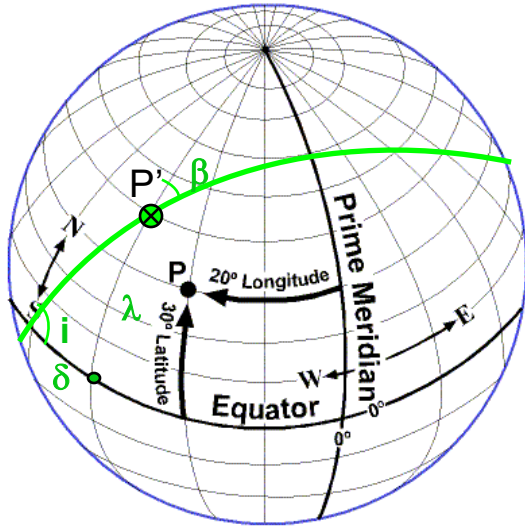
θ_1, θ_2 azimuth



Using an equation for Great Circle Arcs, distance between 1 & 2 is estimated as:

$$\cos(\eta) = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$D = 2\pi R_\oplus / (2\pi) \arccos(\sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \cos(\theta_1 - \theta_2))$$



Tony Kirvan 11-8-97

SMAD chapter
6.4 p. 153-155

$$\lambda > i ?$$

$$\lambda = i ?$$

$$\lambda < i ?$$

SMAD Appendix D
Table D-1 p. 905 riga
4 col. 3

SMAD Appendix D
Table D-1 p. 905 riga
5 col. 3

$$\sin \beta = \cos i / \cos \lambda$$

$$\cos \delta = \cos \beta / \sin i$$

$$LST = \Omega + \delta$$

$$LST = \Omega + 180^\circ - \delta$$

$$v_{sud} = -v_o \cos \gamma \cos \beta_L$$

$$v_{est} = v_o \cos \gamma \sin \beta_L - v_\lambda$$

$$v_r = v_o \sin \gamma \quad (v_z)$$

$$v_\lambda = 464.5 \cos \lambda \text{ m/s}$$

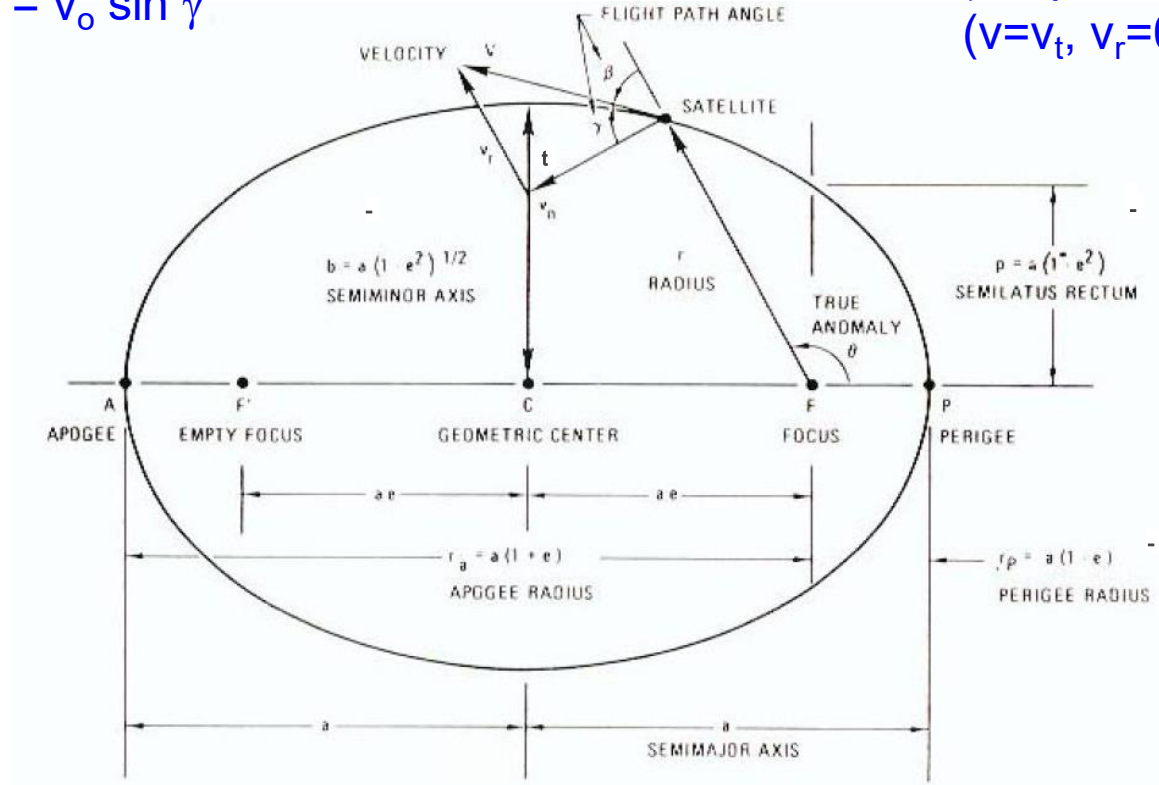
β azimuth di lancio γ
angolo traiettoria
volo al *burn-out*
(vedi prossima slide)

Parametri Ellisse

$$v_t = v_o \cos \gamma (*)$$

$$v_r = v_o \sin \gamma$$

$\gamma=0$ per orbite circolari
($v=v_t$, $v_r=0$)



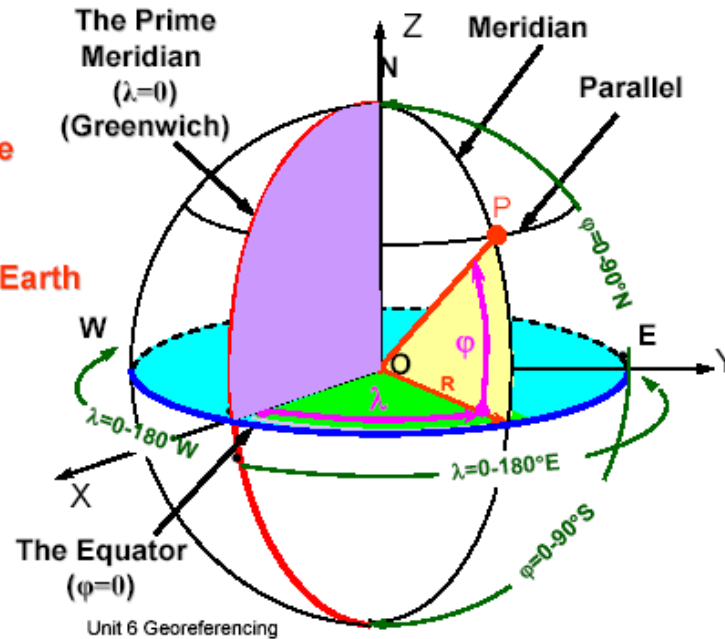
Sistema Geocentrico “Geografico”

λ - Geographic longitude

ϕ - Geographic latitude

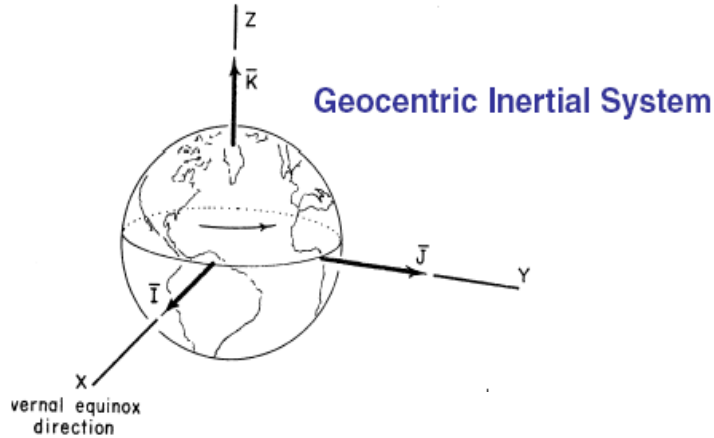
R - Mean Radius of the Earth

O - The Geo-Center

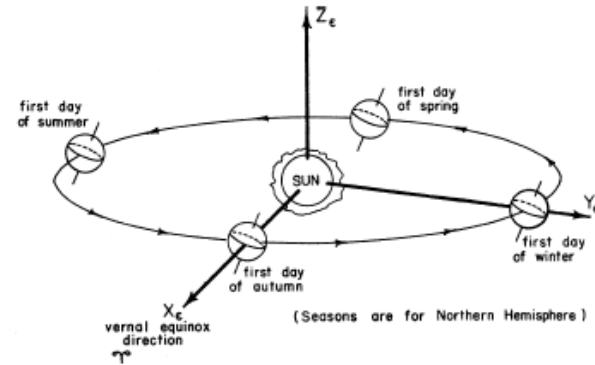


Attenzione all'indicazione lat/long !

Sistemi di Coordinate 2/3

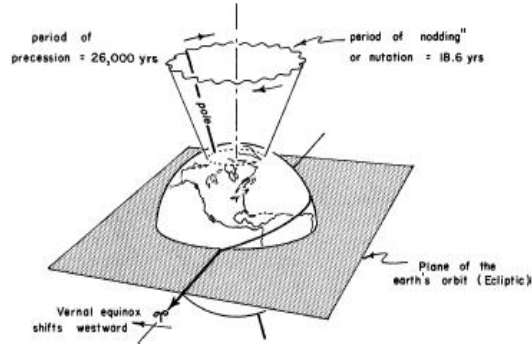


Heliocentric Inertial System



azimuth = ascensione retta α

elevazione = declinazione δ



50.2786" westerly drift of the Vernal Equinox per year

Sistemi di Coordinate 2/3

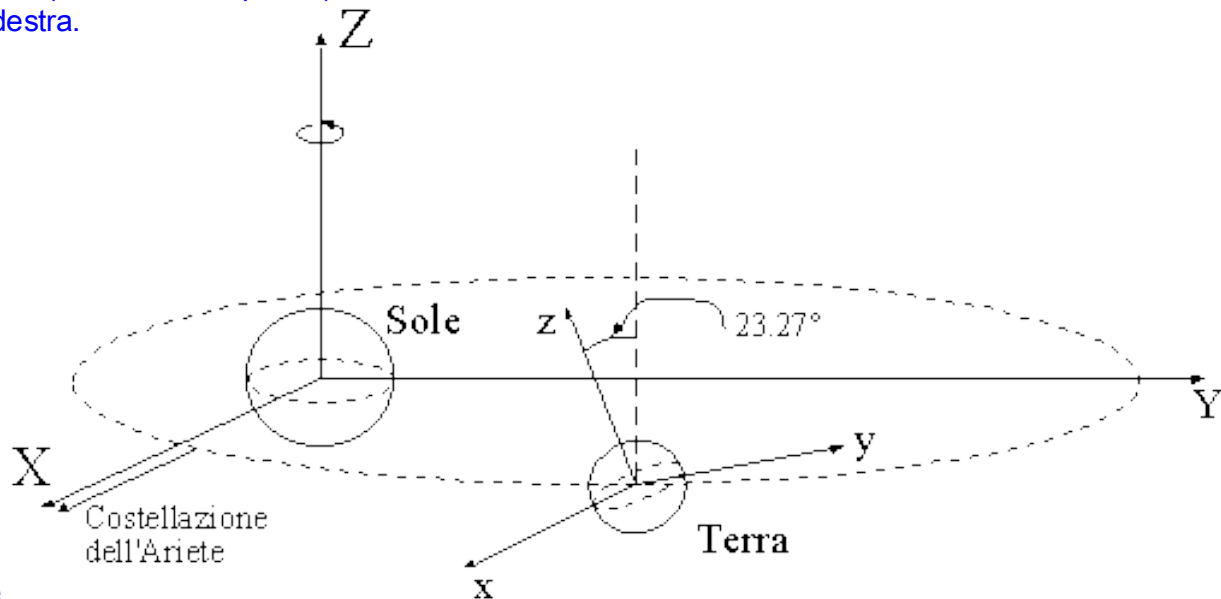
Sistema di riferimento geocentrico (Pseudoinerziale)

Origine nel centro della Terra.

Asse x nel piano dell'eclittica diretto verso la costellazione dell'Ariete ovvero dell'equinozio di Primavera.

Asse z diretto secondo l'asse di rotazione terrestre (verso la stella polare)

Asse y di conseguenza, per formare una terna destra.



Sistema di riferimento eliocentrico

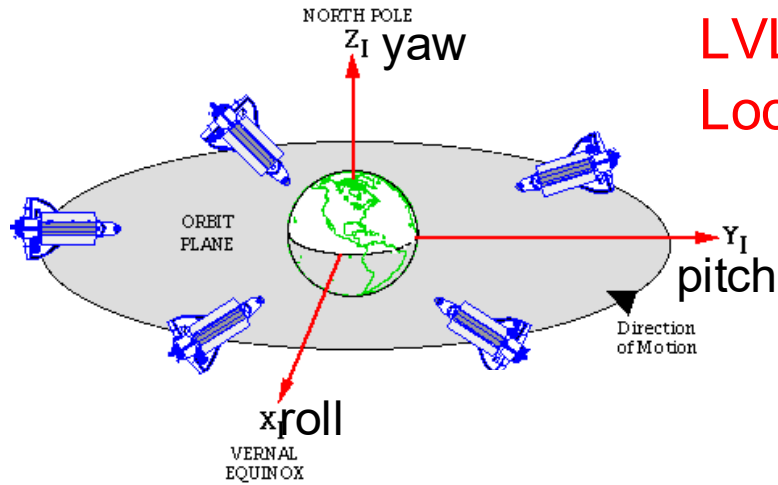
Origine nel centro di massa del sistema solare.

Asse x nel piano dell'eclittica diretto verso la costellazione dell'Ariete ovvero dell'equinozio di Primavera.

Asse z diretto normale al piano dell'orbita terrestre.

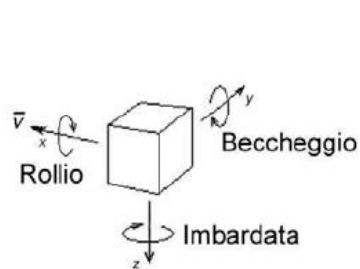
Asse y di conseguenza, per formare una terna destra.

Sistemi di Coordinate 3/3



LVLH

Local Vertical – Local Horizontal



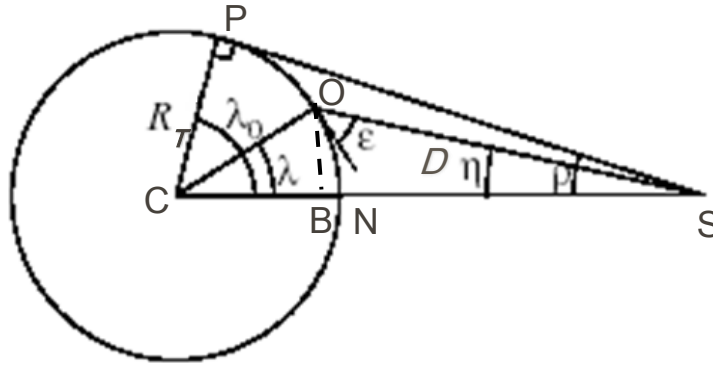
Pitch = 0
Yaw = 0
Roll = 0



Direction of Motion



Geometria Terra / Satellite 1/3



ρ raggio angolare Terra

η angolo di nadir

ε elevazione

λ angolo centrale Terra
(swath width)

SMAD chapter 5.2
fig 5-13 p. 110-113

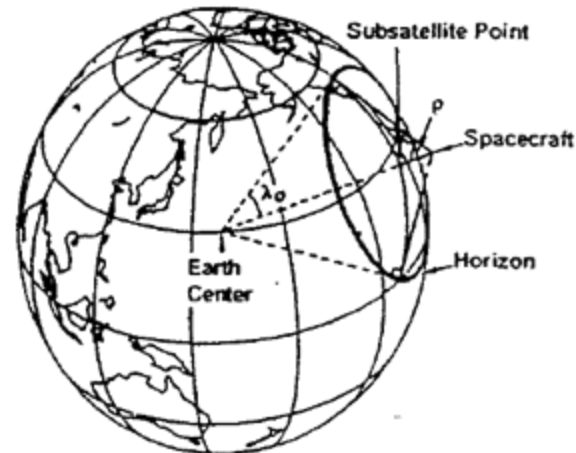
$$\sin \rho = \cos \lambda_0 = R_T/R = R_T / (R_T+h)$$

$$\sin \eta = \cos \varepsilon \sin \rho$$

$$\lambda = \pi/2 - \eta - \varepsilon$$

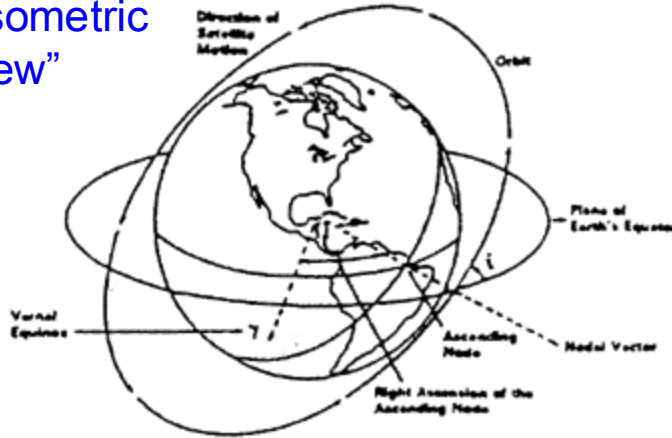
$$\operatorname{tg} \eta = \sin \rho \sin \lambda / (1 - \sin \rho \cos \lambda)$$

$$D = R_T \sin \lambda / \sin \eta$$

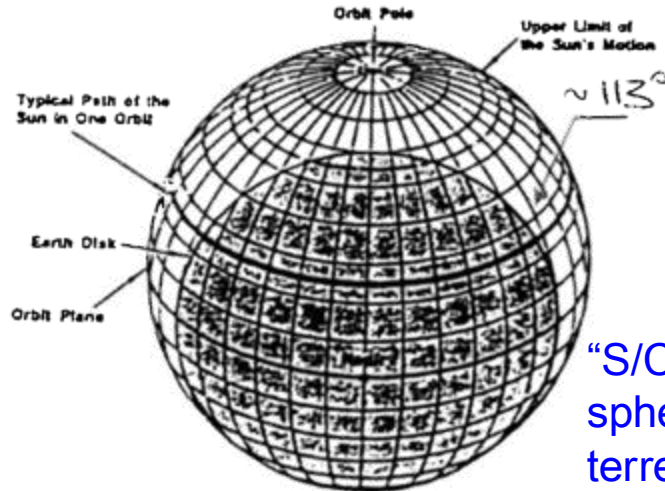
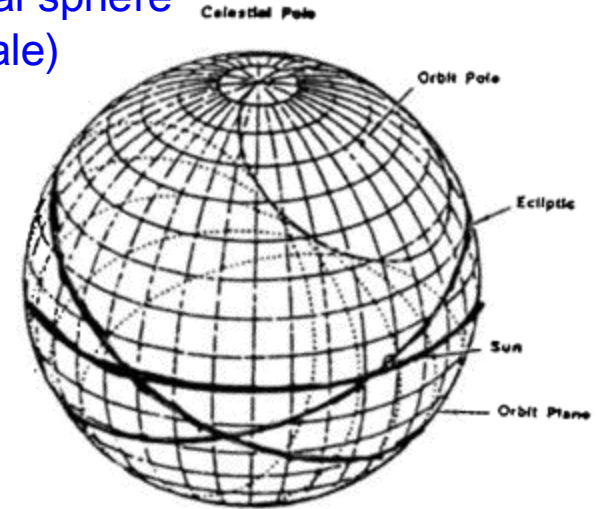


Geometria di un satellite 2/3

“isometric view”



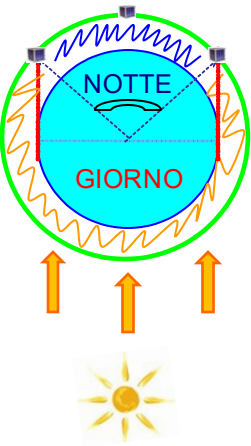
“S/C centered celestial sphere” (inerziale)



$$h = 1000 \text{ km}, i = 32^\circ \Rightarrow$$

$$\tau = 105 \text{ min}, \rho = 60^\circ$$

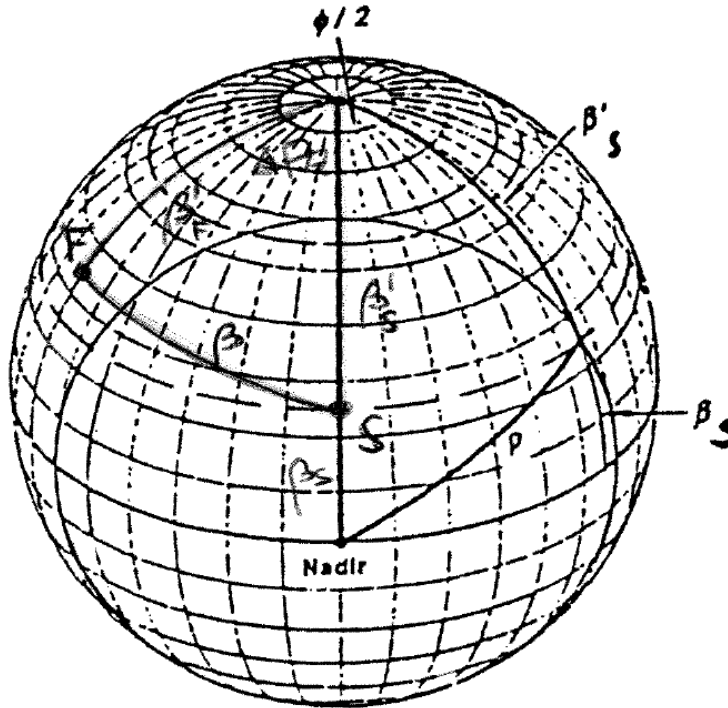
“S/C centered celestial sphere” (riferimento terrestre)



Geometria di un satellite 3/3

“S/C centered celestial sphere”

$$\cos \Phi/2 = \cos \rho / \cos \beta_s$$



Analisi dell'eclissi da una LEO

$$\beta_s = 25^\circ \Rightarrow \Phi/2 = 56.5^\circ$$

Durata fase notturna (eclisse): max e min

β_s : max e min β

$$\beta_F = 35^\circ, Az_0 = 70^\circ$$

$$A = 0.5 \text{ m}^2$$

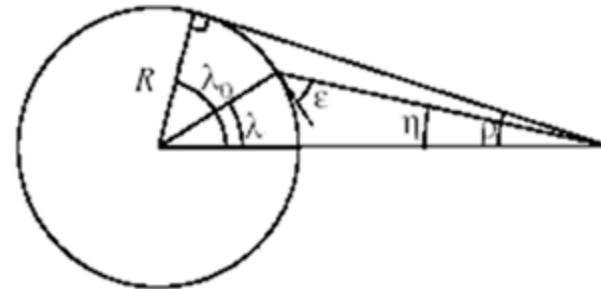
$\Rightarrow$

- “eclisse”:

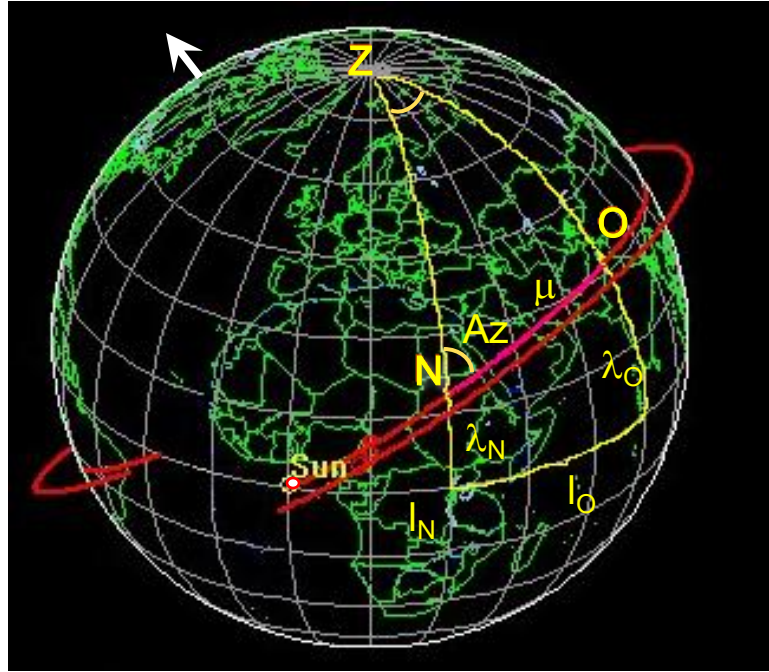
$$Az = Az_0 \pm \Phi/2$$

- “dietro”:

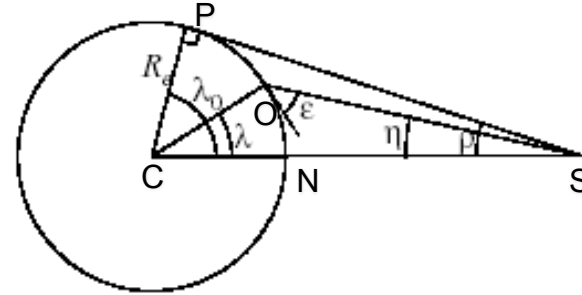
$$\beta = \pm \pi/2$$



Passaggio sopra la stazione 1/8



“Earth centered celestial sphere”



Meglio: geometria vista dal satellite!

Nota: quella segnata non è un'orbita del satellite ma un cerchio max che passa per O e N

N = Sub Satellite Point (l_N, λ_N)

O = Punto qls Terra (λ_O, λ_O) !!!

$$\cos \mu = \sin \lambda_N \sin \lambda_O + \cos \lambda_N \cos \lambda_O \cos(l_O - l_N) \Rightarrow \eta$$

$$\sin \lambda_O = \sin \lambda_N \cos \mu + \cos \lambda_N \sin \mu \cos Az \quad (\mu \equiv \lambda)$$

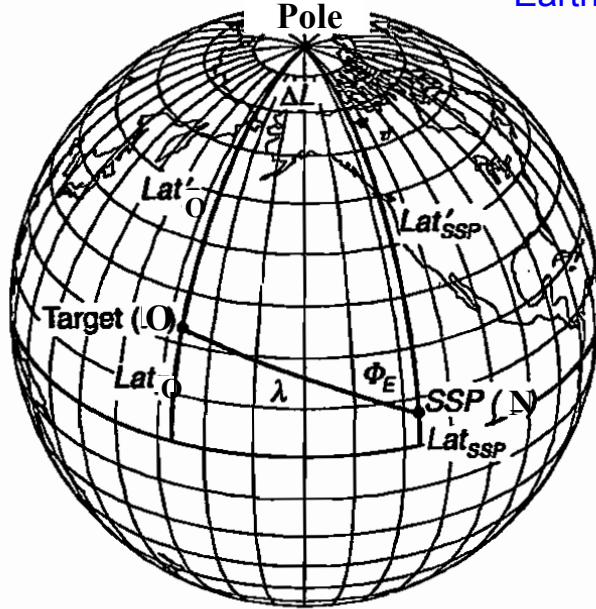
$$\cos Az = (\sin \lambda_O - \sin \lambda_N \cos \mu) / \cos \lambda_N \sin \mu$$

Risultato: angoli da satellite

SMAD chapter
5.2 fig 5-12 p. 112

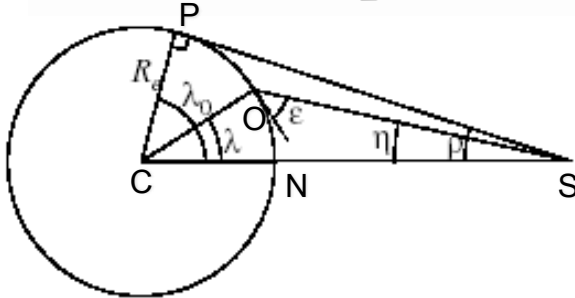
Passaggio sopra la stazione 2/8

"Earth centered celestial sphere"



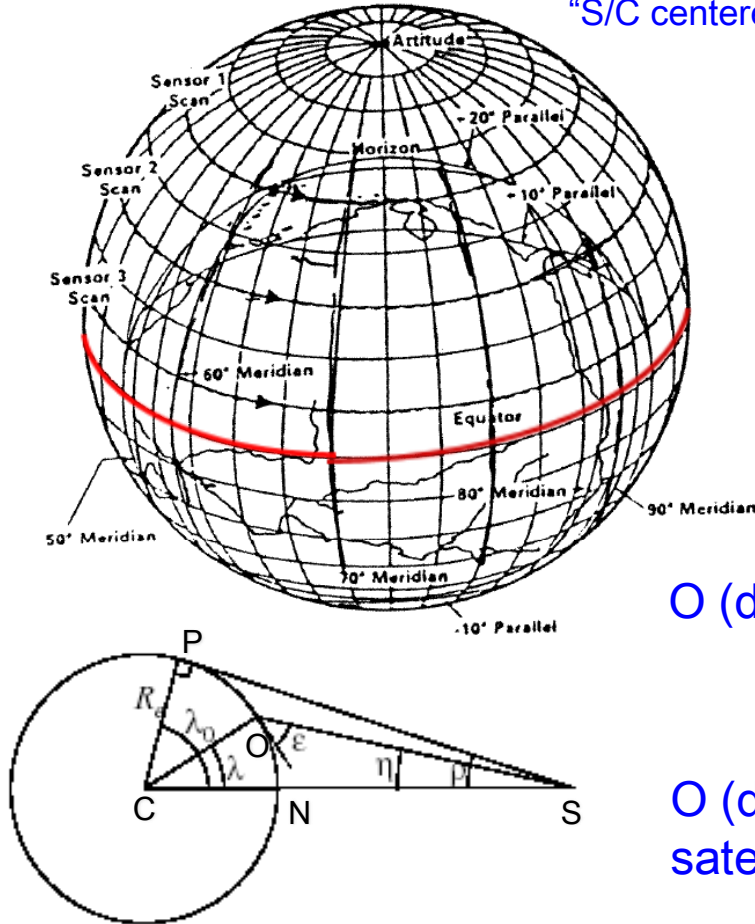
$$l_O = 200^\circ, \lambda_O = 22^\circ \text{ (hawaii)}$$

$$l_N = 185^\circ, \lambda_N = 10^\circ$$



Passaggio sopra la stazione 3/8

"S/C centered celestial sphere"



$$l_O = 200^\circ, \lambda_O = 22^\circ \text{ (hawaii)}$$

$$l_N = 185^\circ, \lambda_N = 10^\circ$$

$\Rightarrow$

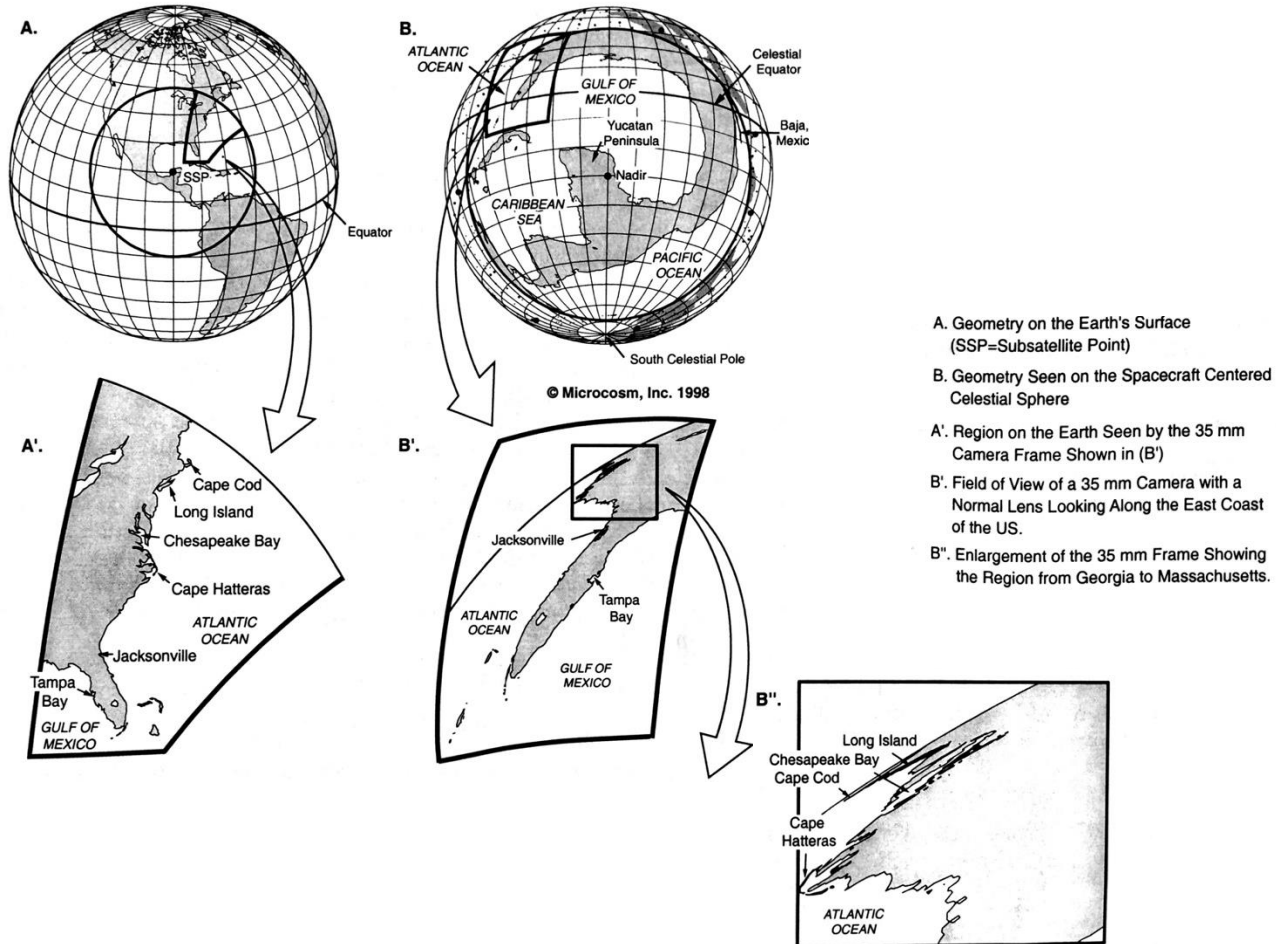
$$\rho = 59.8^\circ, \lambda_0 = 30.2^\circ,$$

$$D_{\max} = 3709 \text{ km}$$

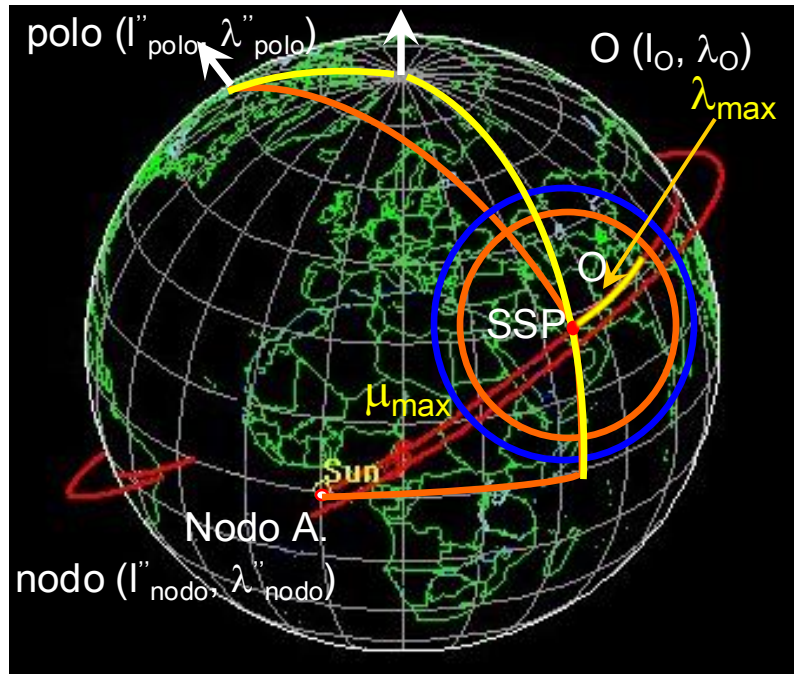
$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 18.7^\circ \text{ (swath width)} \\ Az = 48.3^\circ \end{array} \right\} \text{O (da N)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 56.8^\circ \text{ } (\epsilon = 14.5^\circ) \\ D = 2444 \text{ km} \end{array} \right\} \text{O (da satellite)}$$

Passaggio sopra la stazione 5/8



Passaggio sopra la stazione 6/8



“Earth centered
celestial sphere”

$$\sin \eta_{\max} = \cos \varepsilon_{\min} \sin \rho$$

$$\lambda_{\max} = \pi/2 - \eta_{\max} - \varepsilon_{\min}$$

$$D_{\max} = R_T \sin \lambda_{\max} / \sin \eta_{\max}$$

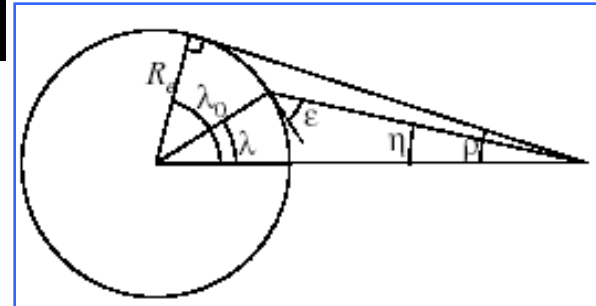
$$\lambda''_{\text{polo}} = \pi/2 - i \quad (\text{lat})$$

$$l''_{\text{polo}} = l''_{\text{nodo}} - \pi/2 \quad (\text{long})$$

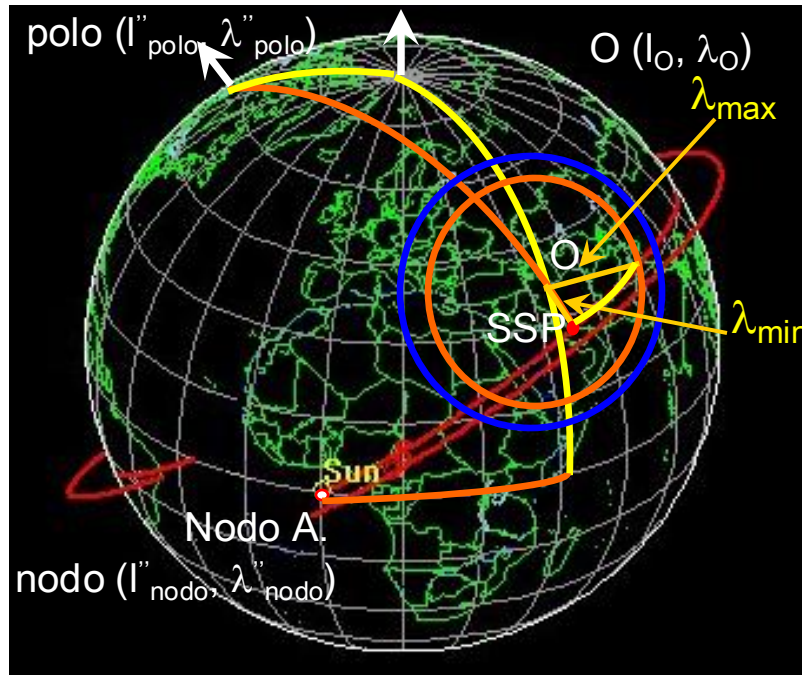
$$\sin(l_o - l''_{\text{nodo}}) = \tan \lambda_o / \tan i$$

$$\sin \mu_{\max} = \sin \lambda_o / \sin i$$

$$O \equiv \text{SSP}$$



Passaggio sopra la stazione 7/8



SMAD chapter 5.3.1
fig 5-17 p. 118-121

“Earth centered
celestial sphere”

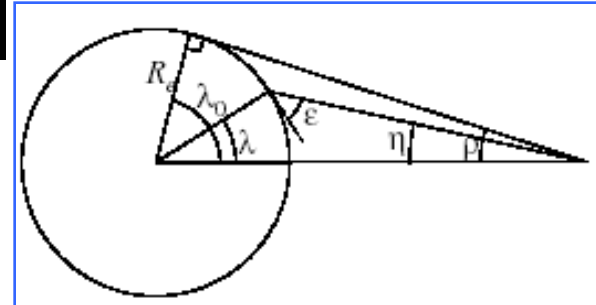
$$\sin \eta_{\max} = \cos \varepsilon_{\min} \sin \rho$$

$$\lambda_{\max} = \pi/2 - \eta_{\max} - \varepsilon_{\min}$$

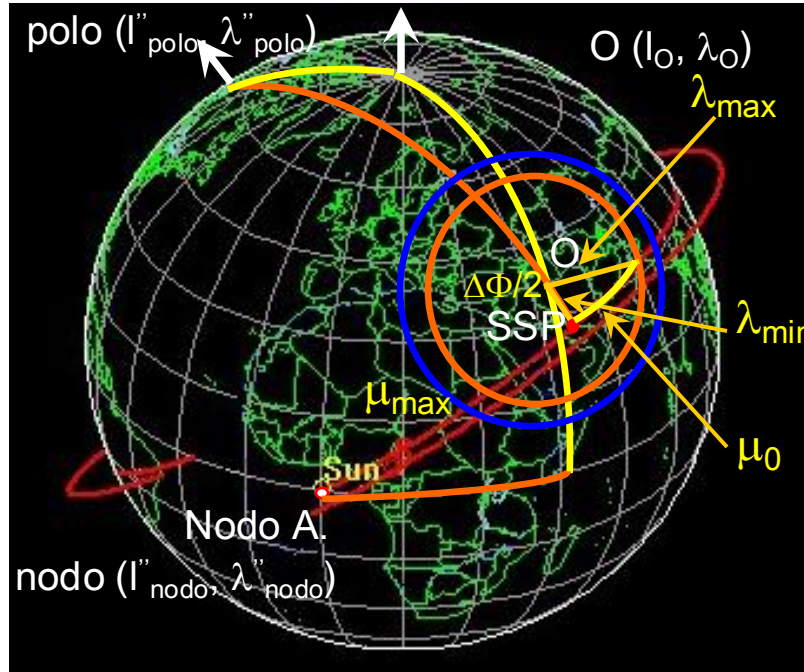
$$D_{\max} = R_T \sin \lambda_{\max} / \sin \eta_{\max}$$

$$\lambda''_{\text{polo}} = \pi/2 - i \quad (\text{lat})$$

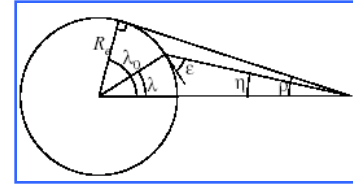
$$l''_{\text{polo}} = l''_{\text{nodo}} - \pi/2 \quad (\text{long})$$



Passaggio sopra la stazione 8/8



“Earth centered
celestial sphere”



$$\sin(l_O - l''_{\text{nodo}}) = \tan \lambda_O / \tan i$$

$$\sin \mu_{\text{max}} = \sin \lambda_O / \sin i$$

$$O \equiv \text{SSP}$$

$$\sin \lambda_{\text{min}} = \sin \lambda''_{\text{polo}} \sin \lambda_O +$$

$$+ \cos \lambda''_{\text{polo}} \cos \lambda_O \cos(l_O - l''_{\text{polo}})$$

$$\tan \eta_{\text{min}} = \sin \rho \sin \lambda_{\text{min}} / (1 - \sin \rho \cos \lambda_{\text{min}})$$

$$\varepsilon_{\text{max}} = \pi/2 - \eta_{\text{min}} - \lambda_{\text{min}}$$

$$\omega_{\text{max}} = \dot{\theta}_{\text{max}} \cong v_{\text{sat}} / D_{\text{min}}$$

$$\cos \mu_0 = \cos \lambda_{\text{max}} / \cos \lambda_{\text{min}}$$

$$R_T \sin \lambda_{\text{min}} = D_{\text{min}} \sin \eta_{\text{min}}$$

$$\cos \Delta\Phi/2 = \tan \lambda_{\text{min}} / \tan \lambda_{\text{max}}$$

$$T = (\tau / \pi) \text{acos}(\cos \lambda_{\text{max}} / \cos \lambda_{\text{min}})$$

Esercizio 1

Finestre di lancio:

Supponi che il punto Γ (corrispondentemente all'orbita in cui bisogna lanciare) si trovi a 30° W (rispetto al meridiano di Greenwich) e che la base di lancio sia a Trieste (lat = 45° , long = 14.5°) e l'inclinazione a cui vuoi mettere in orbita il satellite sia 60° , $a=20000$ km, $e=0.67$. Al momento del “burn-out” l'angolo di azimuth debba essere $\gamma = 10^\circ$ ($\theta=25^\circ$).

Valutare:

- il LST (lancio al nodo ascendente e discendente)
- la velocità con cui bisogna lanciare il satellite (sud, est, z)

Ripetere lo stesso esercizio ponendo $i=80^\circ$, 50° , 45° e 40°

[illegible]

Esercizio 2

Finestre di lancio:

Supponi che Ω sia 9.2° (sistema inerziale, corrispondentemente all'orbita in cui bisogna lanciare) e che la base di lancio sia a Trieste (lat = 45° , long = 14.5°) e l'inclinazione a cui vuoi mettere in orbita il satellite sia 60° , $a=20000$ km, $e=0.67$. Al momento del “burn-out”, il satellite si troverà sulla sua orbita con un'anomalia vera $\theta=25^\circ$.

Valutare:

- il LST (lancio al nodo ascendente e discendente)
- la velocità con cui bisogna lanciare il satellite (sud, est, z)

Esercizio 3

Elemento	Valore		Elemento	Valore	
h	400	km	Ω	90	gradi
e	0		ω	N/A	gradi
i	60	gradi	ν	0	gradi
				360	gradi

calcolare:

- la massima latitudine della traccia a Terra
- lo spostamento dei nodi per orbita

Esercizio 4

Nelle stesse condizioni, considerando un angolo di elevazione minimo (ε) pari a 25° (e successivamente per 10°), calcolare:

- la “swath width” ($2\lambda_{\max}$)
- il campo di vista richiesto per coprire questo “swath” ($2\eta_{\max}$)
- la distanza dal bordo della “swath” ($D(\lambda_{\max})$)

Esercizio 4

Nelle stesse condizioni, considerando un angolo di elevazione minimo (ε) pari a 25° (e successivamente per 10°), calcolare:

- la “swath width” ($2\lambda_{\max}$)
- il campo di vista richiesto per coprire questo “swath” ($2\eta_{\max}$)
- la distanza dal bordo della “swath” ($D(\lambda_{\max})$)

RESULTS (geometrical variables)		
Max Eclipse time	36,11	min
Φ	136,15	deg
Eclipse Time $T_E = f(\beta_s)$	35,00	min
	37,8%	
Day Time	57,56	min
	62,2%	
Swath Calculations		
Angular Earth Radius ρ	70,22	deg
	1,23	rad
Nadir angle $\eta_{\max}$	58,52	deg
	1,02	rad
Earth central angle $\lambda_{\max}$	6,48	deg
	0,11	rad
Swath width $2\lambda_{\max}$	12,96	deg
	0,23	rad
Field of view for swath (FoV) $2\eta_{\max}$	117,04	deg
	2,04	rad
Distance to the edge of swath $D_{\max}$	844,02	km
Distance to the edge of swath on Earth $S_{\max}$	722,11	km
Elevation minimum $\varepsilon_{\min}$	68,69	deg
	1,198806722	rad
Earth central angle $\lambda_{\max}$	1,31	deg
	0,022923754	rad
Swath Calculations	146,210832	km
	146,2076306	km
Area	67159,73432	km ²
P/Area	2,97797E-10	W.m-2
	20	W

Esercizio 5

Nelle condizioni $h=400$ km, $e=0$, $i=60^\circ$, se la stazione a Terra è posta ad una latitudine di 34° N e longitudine di 118° W e la longitudine del nodo ascendente durante il passaggio corrente è di 75° E, calcolare (usare $\varepsilon_{\min} = 10^\circ$):

- la distanza minima fra la S/C e la stazione a terra durante il passaggio corrente (874.6 km)
- la massima velocità angolare al passaggio corrente (30.14 deg/min)
- il tempo in vista della stazione a Terra durante il passaggio corrente (5.15 min)
- il massimo tempo in vista della stazione a Terra durante un passaggio sopra la stazione (6.21 min)
- longitudine della GS affinché la S/C passi sopra essa (232.1° , 97.9°)