RAPPRESENTAZIONI DI $sl(2,\mathbb{C})$

Cerchiamo matrici t_3, t_+, t_- t.c.

$$[t_3, t_\pm] = \pm t_\pm \qquad [t_+, t_-] = 2t_3 .$$

- Partiamo cercando rap. finito dimensionali.

- Sia $|\lambda\rangle$ un autovett. di t_3 con autovalore λ:

$$t_3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

Allora

$$t_3(t_\pm|\lambda\rangle) = (t_\pm t_3 \pm t_\pm)|\lambda\rangle = (\lambda \pm 1)t_\pm|\lambda\rangle$$

$\Rightarrow$ $t_\pm|\lambda\rangle$ è autovett. con autoval. $\lambda \pm 1$, se $t_\pm|\lambda\rangle \neq 0$

- Siccome la rap. è finito dim. (e autovett. relativi ad autoval. distinti sono indip.) applicando ripetutam. t_+, devo arrivare a un vett. nullo (processo si deve fermare)

$\Rightarrow$ $\exists\ |j\rangle$ con $t_3|j\rangle = j|j\rangle$ t.c.

$$t_+|j\rangle = 0 \qquad \leftarrow \text{HIGHEST WEIGHT STATE}$$

- Possiamo allora definire i seguenti altri stati:

$$|j-k\rangle = (t_-)^k|j\rangle$$

Essi sono t.c.

$$t_3|j-k\rangle = (j-k)|j-k\rangle$$

$$t_-|j-k\rangle = |j-k-1\rangle \qquad (*)$$

$$t_+|j-k\rangle = t_+(t_-)^k|j\rangle = (t_- t_+ t_-^{k-1} + 2 t_3 t_-^{k-1})|j\rangle =$$
$$= (2 t_3 t_-^{k-1} + 2 t_- t_3 t_-^{k-2} + t_-^2 t_+ t_-^{k-2})|j\rangle =$$
$$= (2 t_3 t_-^{k-1} + 2 t_- t_3 t_-^{k-2} + 2 t_-^2 t_3 t_-^{k-3} + t_-^3 t_+ t_-^{k-3})|j\rangle$$
$$= (2 t_3 t_-^{k-1} + 2 t_- t_3 t_-^{k-2} + \dots + 2 t_-^{k-1} t_3 + \cancel{t_-^k t_+})|j\rangle$$
$$= \underbrace{2\sum_{\ell=1}^{k}(j-k+\ell)}_{k(j-k)+\frac{k(k+1)}{2}} t_-^{k-1}|j\rangle = k(2j-k+1)|j-k+1\rangle$$

Per una rap. finito-dim., deve esistere $k_{max} \in \mathbb{Z}$ t.c. $|j-k_{max}\rangle \neq 0$ ma $t_-|j-k_{max}\rangle = 0$. Allora avrei

$$t_+ t_- |j-k_{max}\rangle = 0$$
$$t_+(t_-)^{k_{max}+1}|j\rangle = \dots = 2\sum_{\ell=1}^{k_{max}+1}(j-k_{max}-1+\ell)t_-^{k_{max}}|j\rangle = (k_{max}+1)(2j-k_{max})|j-k_{max}\rangle$$

$\Rightarrow$ $k_{max} = 2j$ ($k_{max}=-1$ corresponds to vect. $|j\rangle$)

$\Rightarrow$ Lowest state is $|-j\rangle$.

L'insieme di vett. indip. $|j\rangle, |j-1\rangle, \dots, |-j+1\rangle, |-j\rangle$ genera uno spazio $2j+1$ dimensionale, che è una RAP. IRRIDUCIBILE di $sl(2,\mathbb{C})$.

Esiste una rap. $\forall j \in \mathbb{Z}/2$ ($k_{max} \in \mathbb{Z}$)!
Le rap. irrid. di $sl(2)$ sono R_j $j \in \mathbb{Z}/2$, con $\dim R_j = 2j+1$.

Grazie alle relazioni (*) si possono scrivere le matrici che rappresentano $t_\pm, t_3$ in qta base.

Per es. (base è $|j\rangle, |j-1\rangle, \dots, |-j\rangle$; $|j\rangle \in \mathrm{Ker}\, t_+$, $|-j\rangle \in \mathrm{Ker}\, t_-$)

$j=0 \rightarrow$ SINGOLETTO $\quad t_\pm = 0, \; t_3 = 0$

$$j = 1/2 \rightarrow t_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} \qquad t_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j = 1 \rightarrow t_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad t_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j \text{ generico} \rightarrow t_3 = \begin{pmatrix} j & & & & \\ & j-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -j+1 & \\ & & & & -j \end{pmatrix} \qquad t_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$t_+|j-k\rangle = k(2j-k+1)\,|j-k+1\rangle$

$$t_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2j & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2(2j-1) & 0 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 3(2j-2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ & & \vdots & \vdots & 2j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo regole di comm.

$$[t_+, t_-] = \begin{pmatrix} 2j & & & & \\ & 2(2j-1) & & & \\ & & 3(2j-2) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2j \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 2j & & & \\ & & 2(2j-1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2j & & & & \\ & 2j-2 & & & \\ & & 2j-4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -2j \end{pmatrix} = 2t_3$$

$$[t_3, t_-] = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ j-1 & j-2 & & & & \\ & & j-3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ j & 0 & & & & \\ & j-1 & 0 & & & \\ & & j-2 & \ddots & \ddots & \\ & & & & -j+1 & 0 \end{pmatrix} = -t_-$$

$$[t_3, t_+] = t_+$$

$$(t_+)_{mn} = \delta_{m,n-1}\; m(2j-m+1)$$

$$(t_3)_{ls} = \delta_{ls}\,(2j-l+1)$$

$$(t_3 t_+)_{ln} = \delta_{ls}(2j-l+1)\;\delta_{s,n-1}\; s(2j-s+1) =$$

$$= \delta_{l,n-1}\;(2j-l+1)^2 l$$

$$(t_+ t_3)_{ln} = \delta_{l,s-1}\; l(2j-l+1)\;\delta_{sn}\;(2j-n+1)$$

$$= \delta_{l,n-1}\; l\,(2j-l+1)(2j-l)$$

$$(t_3 t_+ - t_+ t_3)_{ln} = \delta_{l,n-1}\;\; l(2j-l+1) = (t_+)_{ln}$$

Vediamo ora i generatori nella RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA

- Notiamo che J_+, J_3, J_- sono autovett. di $Ad(J_3)$
- Inoltre $Ad(J_-)\cdot J_3 = J_-$ $\quad Ad(J_-)\cdot J_+ = -2J_3$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}J_+ = |1\rangle \qquad J_3 = |0\rangle \qquad J_- = |-1\rangle$$

Vediamo ora da quali matrici sono rappresentati i generatori:

$$\mathrm{Ad}(J_3)\cdot -\tfrac{1}{2}J_+ = -\tfrac{1}{2}J_+$$
$$\mathrm{Ad}(J_3)\cdot J_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{Ad}(J_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ad}(J_3)\cdot J_- = -J_-$$

$$\mathrm{Ad}(J_+)\cdot -\tfrac{1}{2}J_+ = 0$$
$$\mathrm{Ad}(J_+)\cdot J_3 = 2(-\tfrac{1}{2}J_+) \quad \rightarrow \quad \mathrm{Ad}(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ad}(J_+)\cdot J_- = 2J_3$$

$$\mathrm{Ad}(J_-)\cdot -\tfrac{1}{2}J_+ = J_3$$
$$\mathrm{Ad}(J_-)\cdot J_3 = J_- \quad \rightarrow \quad \mathrm{Ad}(J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ad}(J_-)\cdot J_- = 0$$

$\rightarrow$ La rap. aggiunta è la rap. con $\underline{\underline{j=1}}$.

(Potevamo capirlo anche dal fatto che c'è una sola rap. di $sl(2,\mathbb{C})$ di dim. 3).

Extra: JORDAN DECOMPOSITION

Dato un COMPLEX vector space V, ogni endomorfismo A che agisce su V può essere decomposto in maniera univoca come

$$A = \underbrace{A_s}_{\text{diagonalizzabile}} + \underbrace{A_n}_{\text{nilpotente}} \qquad \text{con } [A_s, A_n] = 0$$

(Inoltre A_s e A_n possono essere espressi come polinomi in A.)

La forma canonica è

$$\left(\begin{array}{ccc|c|cc}
\lambda_1 & 1 & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & \\
 & & \lambda_1 & & & \\
\hline
 & & & \lambda_2 & & \\
\hline
 & & & & \lambda_3 & 1 \\
 & & & & & \lambda_3 \\
 & & & & & & \ddots
\end{array}\right)$$

"Jordan form".

Per le alg. semisemplici vale la seguente prop.:

Prop. Sia $\mathfrak{g}$ un'alg. semisempl.. $\forall a \in \mathfrak{g}$, $\exists\, a_s, a_n \in \mathfrak{g}$ t.c. $\forall$ rep. $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ abbiamo

$$\rho(a)_s = \rho(a_s) \quad \text{e} \quad \rho(a)_n = \rho(a_n).$$

Se abbiamo due endomorfismi A e B $: V \to V$ che commutano, cioè $[A,B]=0$, allora essi ammettono forme di Jordan compatibili, cioè $\exists$ decomposizione di V in $\bigoplus_{i=1}^{N} V_i$ t.c. in ogni V_i

$$A : V_i \to V_i \quad \text{e} \quad B : V_i \to V_i$$

e in V_i
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & b \end{pmatrix}.$$

Partiamo da A. Essa avrà M autovalori a_k $k=1,\dots,M$. Ad ogni autovalore è associato un autosp. W_k t.c.
$$A : W_k \to W_k \quad , \quad V = \bigoplus_{k=1}^{M} W_k \quad \text{con } m_k \equiv \dim W_k$$
e la matrice associata è a blocchi con $\begin{pmatrix} a_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a_k \end{pmatrix}$ in W_k.

Un vettore v sta in W_k se e solo se
$$(A - \mathbb{1} a_k)^{m_k} v = 0 .$$

Dato $v \in W_k$, anche $Bv \in W_k$: infatti,
$$(A - \mathbb{1} a_k)^{m_k} (B v) = B (A - \mathbb{1} a_k)^{m_k} v = 0 .$$

Quindi B preserva la decomposizione $V = \bigoplus_{k=1}^{M} W_k$.

In ogni W_k posso scegliere una base t.c. $B|_{W_k}$ sia nella forma a blocchi di Jordan. Quindi posso scrivere

$$V = \bigoplus_k \bigoplus_{l_k} V_{k,l} \qquad \text{con} \qquad W_k = \bigoplus_{l_k} V_{k,l}$$

$B : V_{k,l} \longrightarrow V_{k,l}$ e in tale blocco sono $\begin{pmatrix} b_{k,l} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & b_{k,l} \end{pmatrix}$

Ma avviene anche che A preserva la decomp. in $V_{k,l}$:

$A : V_{k,l} \to V_{k,l}$

(Stesso dim. sopra $\rightsquigarrow$ $A v_{k,l} \in V_{k,l}$.) //

Nel caso di $H_1, \dots, H_r$ commutanti per $\mathfrak{g}$, dimostreremo che $V_{k_1, \dots, k_r}$ sono 1-dimensionali

$\Longrightarrow$ $\rho(H_1), \dots, \rho(H_r)$ si possono mettere nella forma diagonale.