Lezione 15 - 23/10/2025

Limiti di funzioni

<u>def.</u> $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, x_0 di acc. per E, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$
$L \in \tilde{\mathbb{R}}$

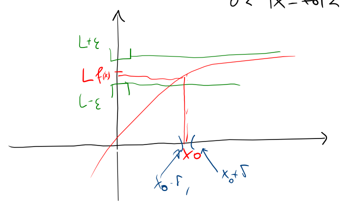
$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$ significa

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall V \text{ intorno di } L,\ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ \forall x \in E \\ \qquad x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V \end{array}}$$

abbiamo visto come diventa nei vari casi (es. $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$
eccetera)

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



$\forall \varepsilon \to \boxed{\exists \lim} \to \exists \delta$

V e U

<u>oss.</u> trovare esplicitamente il rapporto tra (ε e δ)
non è <u>facile</u>

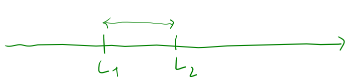
strategia: trovare dei risultati generali
che assicurano che questo <u>rapporto c'è</u>

<u>Prime proprietà dei limiti</u>

1) <u>Unicità</u>

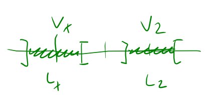
<u>Lemma</u>: se L_1 e $L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $L_1 \neq L_2$
allora $\exists V_1$ di L_1, $\exists V_2$ di L_2 t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

<u>dim.</u>



siano $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $L_1 < L_2$

considero $L_2 - L_1$
fisso $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{4}$



<u>Teo.</u> sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E
siano $L_1, L_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$

Allora $L_1 = L_2$

<u>dim.</u> per assurdo, supponiamo $L_1 \neq L_2$
per il lemma $\exists V_1$ di L_1, $\exists V_2$ di L_2
t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

ho $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$
quindi dato V_1 $\exists U_1$ di x_0 t.c.
$\forall x \in E$, $x \in U_1 \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_1$

ho $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ $\quad]x_0-r_1, x_0+r_1[$

quindi dato V_1 $\exists\, U_1$ di x_0 t.c.

$\forall x\in E$, $\quad x\in U_1\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x)\in V_1$

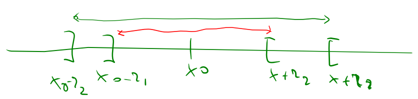
ho $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$ $\quad]x_0-r_2, x_0+r_2[$

quindi dato V_2 $\exists\, U_2$ di x_0 t.c.

$\forall x\in E$, $\quad x\in U_2\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x)\in V_2$

prendo $r=\min\{r_1,r_2\}$; prendo $x\in\,]x_0-r, x_0+r[$

allora $x\in U_1\cap U_2 \setminus\{x_0\}$

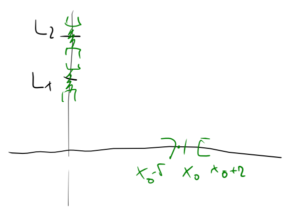


avrei

$f(x)\in V_1$

$\quad\;\in V_2$

impossibile perché $V_1\cap V_2=\emptyset$



2) Permanenza del segno

Teor. sia $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subseteq\mathbb{R}$, x_0 di acc. per E

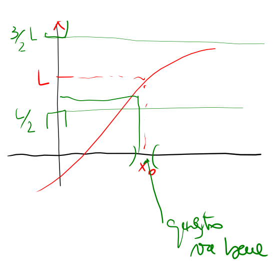
supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ con $L>0$ oppure $L=+\infty$

Allora esiste U di x_0 : $\forall x\in (U\setminus\{x_0\})\cap E$

$f(x)>0$

dim.

supponiamo $L\in\mathbb{R}$, $L>0$



Fisso il seguente intorno di L

$]L/2, \frac{3}{2}L[$ $\quad (\varepsilon = L/2)$

la def. di limite garantisce che

$\exists\, U$ di x_0 in cui

$\forall x\in (U\setminus\{x_0\})\cap E$, $\quad f(x)\in\,]L/2, \frac{3}{2}L[$

ma allora $f(x)>0$

CVD

3) Confronto

Teor. siano $f,g: \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cup\!\!\!\!\!\!|}{}} E\to\mathbb{R}$, $x_0\in\tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

supponiamo che $\forall x\in E\setminus\{x_0\}$

$f(x)\geq g(x)$

se $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

Teor. siano $f, g : E \overset{\subseteq}{} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

supponiamo che $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$

$$f(x) \geq g(x)$$

se $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

dim. supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$

ho $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$

ho $\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty}$

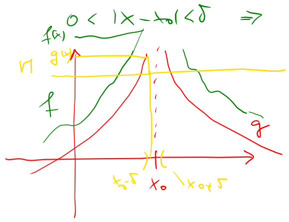
$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) > M$

ma $f(x) \geq g(x)$

allora $f(x) > M$

ho $\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ | $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



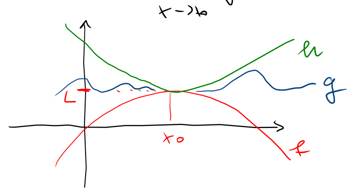
4) 2 carabinieri

Teor. siano $f, g, h : E \overset{\subseteq}{} \overset{\mathbb{R}}{} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

sia $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$



dim. supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ (1)

$\lim_{x \to x_0} h(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ (2)

ma $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ (3) $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$

quindi $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ho che valgono entrambe

allora $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$

conclusione

$\forall \varepsilon > 0, \exists \underset{\min\{\delta_1, \delta_2\}}{\underset{\parallel}{\delta}} > 0 : \forall x \in E,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

CVD

5) operazioni con i limiti

Teo. siano $f, g : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di acc. per E

sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

con $l, m \in \mathbb{R}$

Allora $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + m}$ ①

$\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = l - m$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

e se $m \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

dim. supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, proviamo ①

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l + \frac{\varepsilon}{2}$

non cambia niente se metto $\varepsilon/2$ al posto di ε

$\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta_2$

$\Downarrow$

$m - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2}$

se $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le cond. valgono entrambe

le sommo termine a termine

$\underbrace{l - \varepsilon/2 + m - \varepsilon/2}_{l+m-\varepsilon} < f(x) + g(x) < \underbrace{l + \varepsilon/2 + m + \varepsilon/2}_{l+m+\varepsilon}$

riassunto

$\forall \varepsilon > 0, \exists \overset{\min\{\delta_1,\delta_2\}}{\delta} > 0 : \forall x \in E, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (l+m) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (l+m) + \varepsilon$

$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + m$

CVD

6) forme indeterminate

Teo. 1. se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge \underset{\forall x \neq x_0}{f(x) > 0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

$\left(\wedge \underset{\forall x \neq x_0}{f(x) < 0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \right)$

dim. $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ cioè $\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\Updownarrow$

$0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}$

$\Downarrow$

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon$

$M = \frac{1}{\varepsilon}$

se voglio $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

basta prendere $M = \frac{1}{\varepsilon}$

riassunto $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in E ; \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \cancel{f(x) > \frac{1}{\varepsilon}}$

$\Downarrow$

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

CVD

Teo 2. siano $f, g : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

Teor 2. Siano $f, g : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cup\!|}{E}} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

a) supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

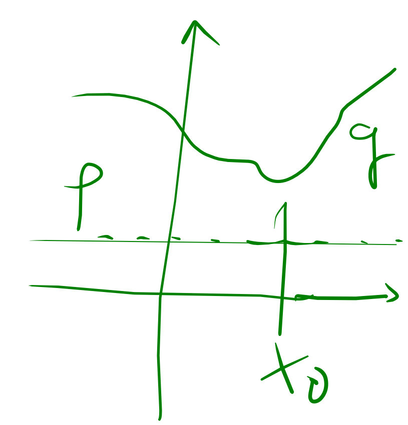
e che $\exists K>0 \wedge \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \; g(x) \geq -K$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$

(l'unico caso escluso è $+\infty - \infty$)

b) supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

e che $\exists \rho > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \quad g(x) \geq \rho$



Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

l'unico caso escluso è $+\infty \cdot 0$