

(61)

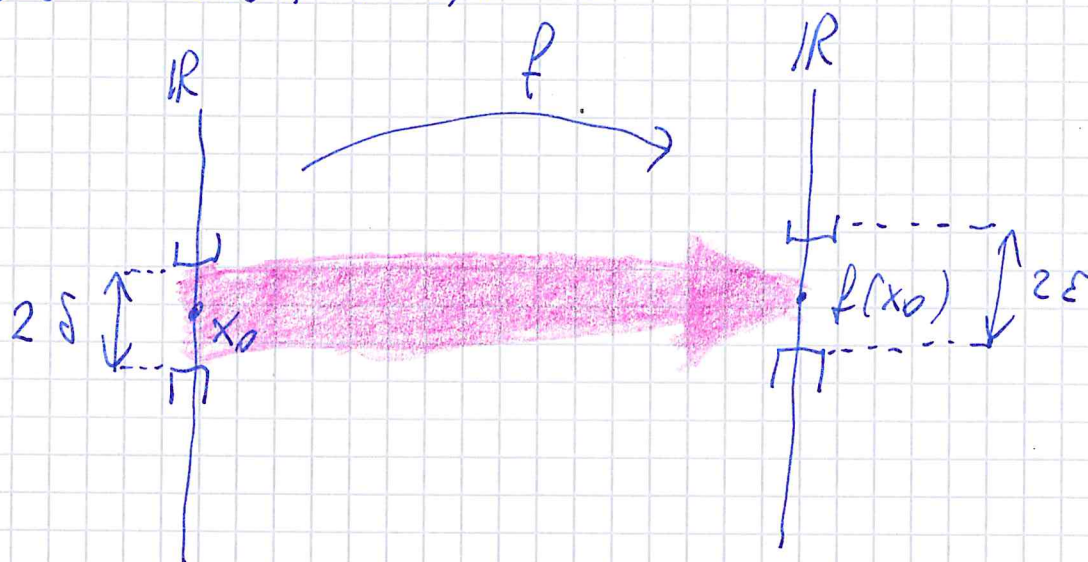
FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in [a, b]$.

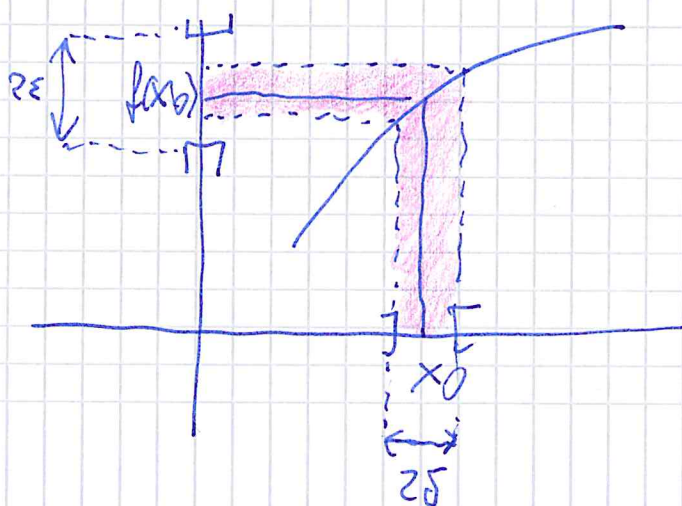
La funzione f si dice "continua in x_0 " se il valore $f(x)$ è vicino a $f(x_0)$ a patto che x sia vicino a x_0 .

Più precisamente:

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$,
allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



oppure



(62)

Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua su $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ è continua in ogni punto di $[a, b]$.

PROPRIETÀ

Se f e g sono continue, allora

$f+g$, $f-g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, f^{-1}
 $\downarrow$ (dove esiste) $\downarrow$ (se esiste)
sono continue.

Esempi

1) $f(x) = 1 \quad \forall x$ è continua

2) $f(x) = x \quad \forall x$ è continua

3) $\Rightarrow$ ogni polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ è una funzione continua.

4) Inoltre, ogni funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi, è continua.

5) La funzione $f(x) = x^\alpha$ è continua su $[0, +\infty[\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \geq 0$ e su $]0, +\infty[\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

In particolare è continua $x^{\frac{1}{n}} \quad \forall n.$

a) la funzione esponenziale

$f(x) = a^x$ è continua $\forall a > 0$

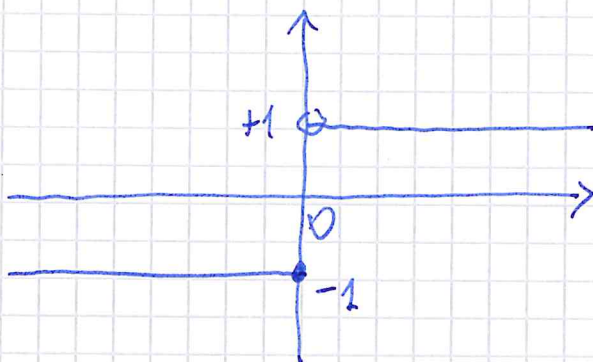
a) la funzione logaritmo

$f(x) = \log_a x$ è continua, $\forall a > 0, a \neq 1.$

a) Le funzioni trigonometriche e le loro inverse sono continue.

ESEMPIO DI FUNZIONE NON CONTINUA

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Esempio pratico

Un interruttore può essere acceso (+1) oppure spento (0). Così se io rappresento lo stato dell'interruttore nel tempo,

(64)

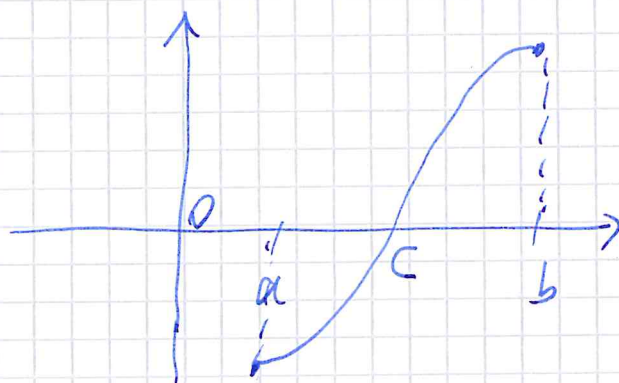
non sono una funzione continua,
perché "salterà" tra 0 e 1.

TEOREMI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI CONTINUE

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,
con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora

$\exists c, a < c < b$, t.c. $f(c) = 0$



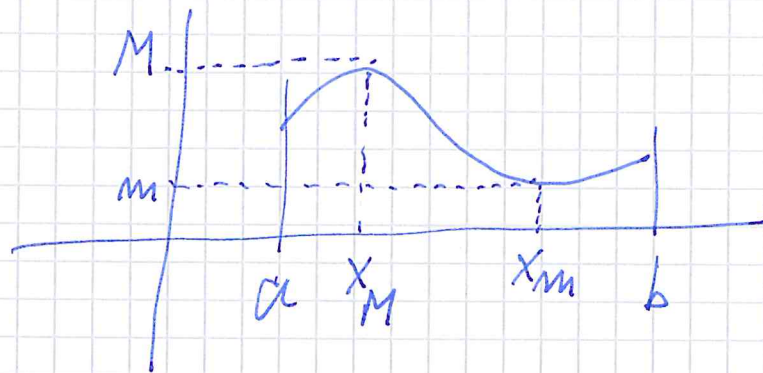
TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

↳ intervallo chiuso!

Allora f ammette massimo e
minimo, cioè esistono due
punti x_m e x_M tali

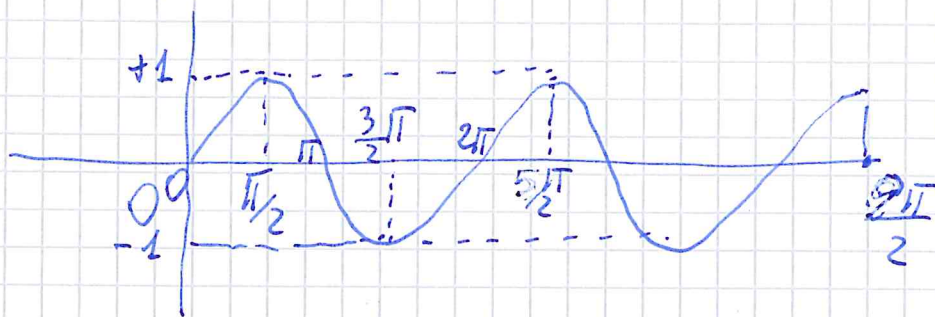
che $\forall x \in [a, b]$, si ha $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$



x_m si dice "punto di minimo" e
 $f(x_m) = m$ si dice valore minimo.

x_M si dice "punto di massimo" e
 $f(x_M) = M$ si dice valore massimo.

N.B. x_m e x_M possono non essere unici.



(66)

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $m = \min_{[a, b]} f$ $M = \max_{[a, b]} f$

allora $\forall c \in [m, M]$

$\exists x_c \in [a, b]$ t.c. $f(x_c) = c$.