

FRANÇOIS VIÈTE



Ritratto di François Viète, 1540-1603

Opere

- *Canon mathematicus*, Lutetiae, Jamet Mettayer, 1579
- *Uniuersalium inspectionum ad canonem mathematicum*, 1579
- *In Artem analyticam Isagoge*, Paris, James Mettayer, 1591
- *Munimen adversus nova Cyclometrica*, Paris, James Mettayer, 1594
- *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adjuncta capitula*, Paris, Jamet Mettayer, 1595
- *Ad problema quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit responsum*, Parisiis, James Mettayer, 1595
- *Apollonius Gallus*, Paris, David Le Clerc, 1600
- *Adversus Christophorum Clavium Expostulatio*, Paris, Petrum Mettayer, 1602
- *Varia opera mathematica*, Parisiis, Barthélémy Macé, James Mettayer, 1609
- *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*, Paris, David Le Clerc, 1600
- *De aequationum recognitione et emendatione*, Paris, Johannes Laquenay, 1615
- *Opere*, Lugduni Batavorum, Bonaventura Elzevier, Abraham Elzevier, 1646

François Viète è il più grande matematico francese del sec. XVI, anche se era di professione avvocato e politico (e forse spia...).

Le sue opere ebbero un'enorme influenza in tutta Europa e anche se non gli si debbono grandi scoperte, paragonabili a quelle dei suoi contemporanei Stevin, Keplero e Galileo, dobbiamo a lui perfezionamenti notevoli dei metodi del calcolo.

Contributi in aritmetica

- Difende le frazioni decimali contro le sessagesimali
- Nei decimali usa | invece della virgola

Novità in algebra

Imbevuto di cultura classica, è subito attratto dalla risonanza profonda che avevano avuto in Europa le edizioni e le traduzioni dei matematici greci, soprattutto quelle di Pappo (tradotto da Comandino, Pesaro 1567) e Diofanto (tradotto da Xylandro, 1575).

Le opere degli algebristi italiani, diffuse da Lione nella Francia meridionale, soprattutto l'*Ars Magna* di Cardano (2a ed. 1570) e l'*Algebra* di Bombelli (1572), gli danno modo di capire Diofanto.

Con ragione Viète afferma (1591) di aver creato una nuova scienza, che egli chiama *logistica speciosa*, cioè il calcolo letterale o algebrico (opposto alla *logistica numerosa* o calcolo aritmetico), che dà ai ragionamenti dei matematici una maggior generalità. Tuttavia la sua è ancora una "algebra sincopata" e non ancora "simbolica".

- La scelta delle vocali *A, E, I* ecc., per le incognite, e delle consonanti *B, G, D, ...* per le quantità note (o anche parametri) di una formula algebrica, indicano il modello greco (Diofanto), che Viète aveva dinnanzi. Per questo Viète è considerato il fondatore dell'*algebra letterale*. Se avesse usato le notazioni del suo tempo (+ e - di Stifel e = di Recorde), avrebbe scritto la generica equazione di II grado come

$$BA^2 + CA + D = 0.$$

- Non gradisce il termine "algebra"; usa piuttosto (per la prima volta) il termine *analisi*, coniando l'espressione *Artis analyticae praxis*.

- Nelle equazioni algebriche mantiene una certa rigidità: cerca di conservare l'*omogeneità* dei termini (eredità della matematica greca), non si libera quindi completamente dalla rappresentazione geometrica delle relazioni algebriche, rendendo le formule inutilmente complicate. Ad esempio in

$$x^3 + 3ax = b$$

la natura di *a* è quadratica (*planum*) e quella di *b* è cubica (*solidum*).

Descartes (1637) riesce a liberarsene, ma tali complicazioni continuano a sussistere fino al principio del sec. XIX.

- Propone un nuovo metodo risolutivo per le equazioni di III grado.
- Conosce alcune relazioni tra coefficienti e radici. Ad esempio se

$$x^3 + b = 3ax$$

ha due radici positive x_1 e x_2 allora

$$3a = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, \quad b = x_1x_2^2 + x_2x_1^2.$$

Si avvicina quasi alle “funzioni simmetriche” delle radici, ma non riesce a proseguire, frenato dal doversi limitare a radici positive.

- E' consapevole che il numero delle radici di un'equazione algebrica è limitato dal grado, ma non fornisce alcuna dimostrazione.
- Si accorge che riga e compasso sono sufficienti per rappresentare le radici quadrata e cubica di un numero e anche le radici di equazioni di III grado. Costruisce un metodo per determinarne le soluzioni approssimate (quasi una anticipazione del metodo di Horner).

Situazione della seconda metà del Cinquecento

Alla fine del Cinquecento si sviluppa un notevole interesse, da parte dei matematici, per la trigonometria. Compaiono e si diffondono in Europa identità trigonometriche di vario genere, tra cui le **formule di prostaferesi**. Pare che tali formule fossero già note parzialmente agli Arabi, ma l'uso generale di esse prevale solo verso la fine del XVI secolo e la dimostrazione geometrica di alcune di esse va attribuita a Viète. Da menzionare anche le formule inverse, note (almeno nei testi anglosassoni) come **formule di Werner** (Johann Werner, 1468-1522, matematico tedesco).

Ad evidenziare la popolarità della trigonometria all'epoca concorre una sfida proposta dal matematico belga **Adriaan van Roomen** (1561-1615), detto anche **Romanus**, il quale sfida tutti i matematici dell'epoca a risolvere la seguente equazione di 45° grado:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \dots - 3795x^3 + 45x = K.$$

L'ambasciatore dei Paesi Bassi presso la corte di Enrico IV asserisce, con toni superbi, che la Francia non ha nessun matematico in grado di risolvere la spinosa questione sollevata dal suo connazionale. A difendere l'onore dei francesi ci pensa però, nel 1593, François Viète che si rende conto che tale equazione rappresenta una di quelle che nascono esprimendo $K = \sin 45\theta$ in termini di $x = 2 \sin \theta$, riuscendo a ricavare subito le radici positive, ovvero le soluzioni dell'equazione.

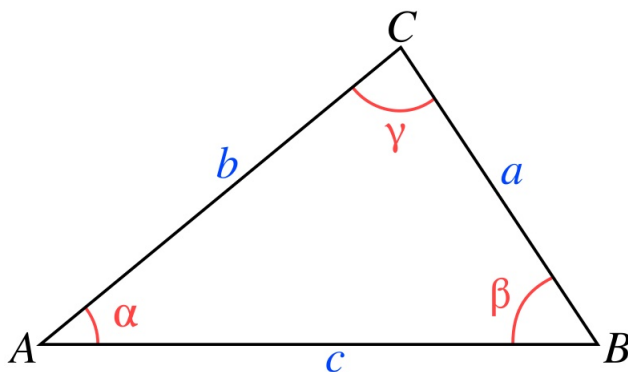
Romanus rimane talmente stupefatto da desiderare un incontro di persona (che si concretizza nel 1597 presso la cittadina di Fontenay-le-Comte) con il matematico francese.

Viète e la trigonometria

Vietà afferma che "la trigonometria è la massima gloria dei matematici perchè abilita a sottomettere a un calcolo meraviglioso cielo, terra e mare". Viète può essere considerato il padre di quel metodo analitico per trattare la trigonometria che viene anche detto *goniometria*.

- Compila tabelle per tutte le 6 funzioni trigonometriche
- Deriva, con un metodo diverso da quello consistente nell'applicare ricorsivamente le formule di Tolomeo, le formule per determinare $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ come somme infinite!
- In *Varia opera mathematica* compare un risultato simile alla "legge delle tangenti".

Legge delle tangenti



In un triangolo qualunque, indicate con a, b, c le lunghezze dei lati e con α, β, γ le ampiezze degli angoli a essi rispettivamente opposti, si hanno per ogni coppia di lati e angoli le seguenti relazioni (qui considerate per i lati di lunghezze a e b):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Vietà sostiene che la trigonometria "serve" all'algebra: le formule di prostaferesi e sugli angoli multipli possono essere utilizzate per risolvere le equazioni di III grado...

Viète e l'analisi

Oltre che introdurre per primo il nome di *analisi*, Viète è un analista in senso moderno: studia processi infiniti. Abbiamo visto infatti che esprime $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$ attraverso somme infinite.

Calcola π fino alla decima cifra con procedimento ricorsivo utilizzando poligoni di n lati inscritti in una circonferenza ma lo esprime anche con la nota

Formula di Viète per π

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

cioè, nel simbolismo attuale,

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}$$

dove

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

Tuttavia la sua opera *Ars analytica* incomincia ad essere presa in considerazione solo dopo il 1630.

Nello stesso periodo in cui la trigonometria rivestiva un ruolo fondamentale all'interno della ricerca matematica vennero "inventati" i logaritmi, che, anche se si diffusero molto più rapidamente, da allora in poi rimasero sempre a stretto contatto con la stessa trigonometria.

Viète e la geometria

Ricostruendo il libro mancante delle *Coniche* di Apollonio, François Viète è il primo a riscoprire il Problema di Apollonio in epoca moderna e lo pone ai matematici belgi. Gli risponde nel 1596 Adriaan van Roomen (1561–1615) che fornisce una soluzione completa che tuttavia apre tra i due una polemica.

Nel suo opuscolo *Apollonius Gallus* Viète contesta la soluzione di van Roomen, in quanto essa non è ottenuta mediante il solo uso di riga e compasso ma dalla intersezione di curve del secondo grado. Viète propone un diverso approccio, che risolva il problema con riga e compasso. Il suo punto di vista è eccezionalmente audace e profondo.

[Ciro Ciliberto, 2021]

Formule di prostaferesi

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Formule di Werner

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

Algoritmo

I passi dell'algoritmo, utilizzando la seconda formula di Werner

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] :$$

1. Scalare: si sposta la virgola decimale a destra o sinistra di tante posizioni quante sono necessarie per trasformare i due fattori della moltiplicazione in numeri compresi tra -1 e 1 .
2. Trovare l'arcocoseno: si determinano, con l'uso di una tavola trigonometrica, i due angoli il cui coseno corrisponde ai valori trovati al passo precedente.
3. Sommare e sottrarre: si calcola la somma e la differenza dei due angoli trovati al passo precedente.
4. Fare la media dei coseni: si calcola la semisomma del valore dei coseni dei due angoli individuati al passo precedente.
5. Riscalare: preso tale valore, si sposta la virgola per il numero opposto di posizioni compiute al primo passo.

Esempio d'uso

Moltiplichiamo 105314 per 0,0720114 usando una tabella trigonometrica del coseno con dettaglio di un grado e precisione fino alla quarta cifra significativa.

1. Scalare: per il primo fattore si sposta la virgola a sinistra di 6 posizioni ottenendo 0,105314; per il secondo fattore a destra di una posizione ottenendo 0,720114.
2. Trovare l'arcocoseno: poiché le migliori approssimazioni disponibili sulle tabella utilizzata sono $\cos(84^\circ)$ (che vale 0,1045) e $\cos(44^\circ)$ (che vale 0,7193), i due angoli individuati in questo passo sono $\alpha = 84^\circ$ e $\beta = 44^\circ$.
3. Sommare e sottrarre: $84^\circ + 44^\circ = 128^\circ$, $84^\circ - 44^\circ = 40^\circ$.
4. Fare la media dei coseni: dalla tabella utilizzata si ha che $\cos(128^\circ) = -0,6157$ e $\cos(40^\circ) = 0,7660$, per cui la semisomma è 0,07515.
5. Riscalare: spostando la virgola a destra di 5 posizioni si ottiene 7515.

Il risultato corretto sarebbe stato 7583,8085796. Si è pertanto commesso un errore inferiore all'1 per cento, pur utilizzando una tavola trigonometrica molto grezza. A supporto di questo algoritmo furono definite tavole con dettaglio pari al grado secondo e precisione fino alla quattordicesima cifra.