Lezione 16 - 24/10/2025

una funzione va a $+\infty$

Teo. supponiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

e che $\exists K > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\},\ g(x) \geq -K$.

una funzione è limitata dal basso

Allora $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$

dim

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\forall M > 0,\ \exists U$ di x_0

- $\exists \delta > 0 : U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
- $\exists a > 0 : U =]a, +\infty[$
- $\exists b > 0 : U =]-\infty, -b[$

$\forall x \in E$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > M$

non cambia niente se invece di $f(x) > M$ faccio $f(x) > M + K$ dove K è quello dell'ipotesi

allora se $x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{> M+K} + \underbrace{g(x)}_{> -K} > M + K - K = M$

il riassunto è

$\forall M > 0,\ \exists U$ di $x_0 : \forall x,\quad x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) + g(x) > M$

è $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = +\infty$

CVD

oss. La permanenza del segno implica

che $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k \in \mathbb{R}$

allora $\exists K > 0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\},\ g(x) > -K$,

Applicazione dei teoremi
- confronto
- 2 carabinieri
- operazioni
- forme indeterminate

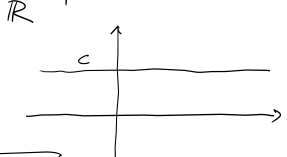
1) funzioni costanti

$x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ di acc. per E

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

consideriamo $f(x) = c$

f è la funzione costante



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \boxed{\lim\limits_{x \to x_0} c = c}$

infatti

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U$ di $x_0 : \forall x \in E \setminus \{x_0\}$

se $x \in U \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$

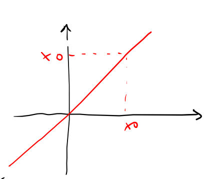
vanno bene tutti gli U

$f(x) = c$

quindi ovviamente $f(x) \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$

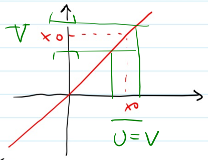
2) funzione identità

$f(x) = x$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

2) funzione identità



$f(x) = x$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$

OK, perché

$\forall V$ di x_0, $\exists U$ di x_0 : $\forall x \in E$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) = x \in V$

fissato V, quale U va bene? $\underline{U=V}$

oss. va bene anche se $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

3) funz. $\frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è tutti i punti di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono pti di acc. per $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

scriviamo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ perché? applico questo teor →

c'è un teor. che dice
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$
e $m \neq 0$
allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ perché?

c'è un teor. che dice
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
allora $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

def. sia $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E
sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ significa $\forall V$ di L, $\exists U$ di x_0 : $\forall x \in E$
$x \in U \setminus \{x_0\} \land x > x_0$
$\Downarrow$
$f(x) \in V$

questo + è nuovo

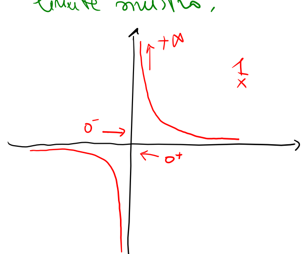
limite destro.

il controllo su cosa fa f(x) quando x è vicino a x_0 lo faccio solo sui punti a destra di x_0

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ significa $\forall V$ di L, $\exists U$ di x_0 : $\forall x \in E$
$x \in U \setminus \{x_0\} \land x < x_0$
$\Downarrow$
$f(x) \in V$

controllo solo a sinistra

limite sinistro.



$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$

però $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste

4) funzioni polinomiali

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ polinomiale

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} a_0 = a_0$, $\lim_{x \to x_0} a_k = a_k$

$$\lim_{x \to x_0} x^k = \lim_{x \to x_0} \underset{\downarrow\, x_0}{x} \cdot \underset{\downarrow\, x_0}{x} \cdot \dots \cdot \underset{\downarrow\, x_0}{x} = x_0^k$$

$$\lim_{x \to x_0} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n$$

$$\lim_{x \to 3} \underset{\downarrow\, 9}{x^2} + \underset{\downarrow\, 3}{x} + \underset{\downarrow\, 1}{1} = 13$$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

$a_n \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^n}_{\downarrow\, +\infty} \Big(\underbrace{\underset{\downarrow\, a_n}{a_n} + \underbrace{a_{n-1} \cdot \underset{\downarrow\, 0}{\tfrac{1}{x}}}_{\downarrow\, 0} + \dots + a_0 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x^n}}_{\downarrow\, 0}}_{\downarrow\, a_n} \Big)$$

$$+\infty \cdot a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 + x^2 + x = +\infty$$

5) funzioni razionali

$f: \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$

radici del polinomio $b_0 + \dots + b_m x^m$ $\longrightarrow$ $S = \{x : \underbrace{b_0 + \dots + b_m x^m = 0}\}$

es. $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1}$

$x_0 \notin S$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_0 + \dots + a_n x^n}{b_0 + \dots + b_m x^m} = \frac{a_0 + \dots + a_n x_0^n}{b_0 + \dots + b_m x_0^m}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = \frac{3}{2}$$

$x_0 \in S$ è un punto in cui si annulla il denominatore

devo semplificare! (Ruffini)

$$f(x) = \frac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$x^4 + x - 2 \xrightarrow{x \to 1} 0$

$x^2 - 1 \xrightarrow{x \to 1} 0$ $\dfrac{0}{0}$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\quad + x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + x + 2 \\ \cline{1-1}
x^3 \qquad + x - 2 & \\
-x^3 + x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 + x - 2 & \\
-x^2 + x & \\ \cline{1-1}
2x - 2 & \\
2x - 2 & \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 &
\end{array}$$

conclusione

$$x^4 + x - 2 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 2)$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\quad + x - 2 & x - 1 \\
-x^4 + x^3 & x^3 + x^2 + x + 2 \\
\hline
x^3 \qquad + x - 2 & \\
-x^3 + x^2 & \\
\hline
x^2 + x - 2 & \\
-x^2 + x & \\
\hline
2x - 2 & \\
2x - 2 & \\
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

conclusione

$$x^4 + x - 2 = (x-1)(x^3+x^2+x+2)$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

lim $$\frac{x^4+x-2}{x^2-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x^3+x^2+x+2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x+2}{x+1} = \boxed{\frac{5}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x-2}{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+x+3}{x^3+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(\underbrace{1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}_{\to 1}\right)}{\cancel{x^3}\left(\underbrace{1+\frac{2}{x^3}}_{\to 1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}{1+\frac{2}{x^3}}\right)}_{\to 1}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a_0+\dots+a_n x^n}{b_0+\dots+b_m x^m}$$

dove $\lim_{x\to x_0} a_0+\dots+a_n x^n = \ell \neq 0$

$\lim_{x\to x_0} b_0+\dots+b_m x^m = 0$

siccome $b_0+b_1x+\dots+b_m x^m = 0$

posso fattorizzare

lim $$\frac{a_0+\dots+a_n x^n}{b_0+\dots+b_m x^m} = \underbrace{\frac{1}{(x-x_0)^{m-k}}}_{\to +\infty \text{ o } -\infty} \underbrace{\left(\frac{a_0+\dots+a_n x^n}{c_0+\dots+c_k x^k}\right)}_{\to \text{costante}}$$

a seconda del segno.

Esempio $$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to ?} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\to \frac{1}{2}}$$

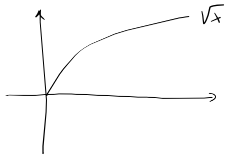
il limite non esiste, infatti $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

invece $$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = +\infty$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} \to +\infty \qquad \frac{x}{x+1} \to \frac{1}{2}$$

6) funzione radice quadrata



$f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

si ottiene

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$x_0 > 0$ $\quad \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

in questi casi si può calcolare esplicitamente il rapporto tra V int. del limite e U int. di x_0

$x > 0, x_0 > 0$ $\quad \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{(x - x_0)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$

$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$

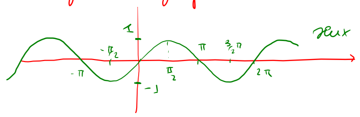
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

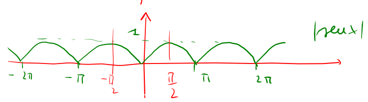
$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$

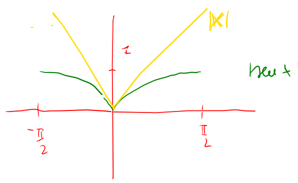
questo mi dà il rapporto tra ε e δ nel limite.

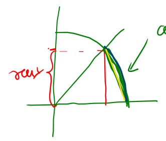
7) funzioni trigonometriche.

oss. disegna il grafico di $x \longmapsto |\operatorname{sen} x|$









arco lungo x è più lungo della corda

$\Downarrow$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x < x$

conclusione $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{|\operatorname{sen} x| \leq |x|}$

prostaferesi

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ $\quad (\alpha+\beta = x)$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ $\quad (\alpha-\beta = x_0)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = x_0 \end{cases}$

$\alpha = \frac{x + x_0}{2}$

$\beta = \frac{x - x_0}{2}$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 2 \underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|}_{\leq \frac{|x - x_0|}{2}} \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right|}_{\leq 1}$$

conclusione $\quad \boxed{|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x - x_0|}$

$\lim_{x \to x_0} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0}$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0}$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg} x_0}$

$0 \leq \underbrace{|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0|}_{\downarrow\, 0} \leq |x - x_0|$

$\downarrow$ 0 $\qquad$ $\downarrow_{x \to x_0}$ 0

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg} x_0$$

$$x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$