4 La Logica con l'Insiemistica

L'insiemistica dà una concettualizzazione univoca([1]) per rappresentare un'infinità di situazioni della realtà, e permette una modellizzazione in grado di rendere chiare relazioni fra enti vari – persone, malattie, farmaci, soldi, di tutto – che sarebbero semplicemente *invisibili* nell'elencazione bruta di, poniamo, 60milioni di casi.

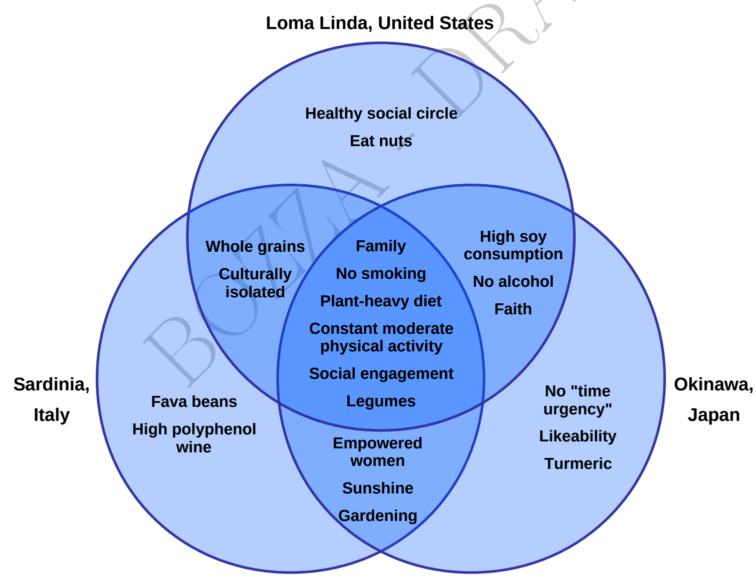


Figure 1: Abitudini in 3 zone del mondo con aspettativa di vita ritenuta molto elevata. Ci sono in tutto 21 elementi, che sono le abitudini considerate. By The RedBurn, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3_blue_zones_venn_diagram.svg

[1] Salvo le attualmente purtroppo numerose ambiguità notazionali, ma questa è altra questione, ora di minor importanza.

4.1 Nozioni di insieme, elementi e appartenenza

In questa trattazione elementare, la nozione di *insieme* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*. Possiamo dire che un insieme è, in qualche modo, una *raccolta* di elementi, o *classe* (di elementi). Ma anche la nozione di *elemento* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*, e anche la nozione di *appartenenza* di un elemento ad un insieme.
Agli insiemi *di solito* si dà nome una lettera latina maiuscola, come A e X, ma per alcuni insiemi si usano grafie particolari, per esempio l'insieme dei numeri naturali viene denotato con $\mathbb{N}$. L'*appartenenza* (concetto primitivo) di un elemento ad un insieme si indica col simbolo $\in$, per esempio con $3 \in I\!\!N$, e la sua negazione con $\notin$: $-3 \notin I\!\!N$. Anche, scriveremo equivalentemente prima $\mathbb{N}$ e poi 3, col simbolo $\in$ scritto specularmente, e similmente per $\notin$.
Come *variabili* atte a rappresentare un elemento indeterminato di un insieme, *di solito* si usano lettere latine minuscole: a, x...
È ovvio che un insieme si può considerare assegnato se è univocamente *chiaro*([2]) se un elemento vi appartiene o no, per esempio le persone *simpatiche* non costituiscono un insieme. Quelle *sane*, o *povere*, o *diabetiche*, o *ipertese*, sì, se si suppone che da qualche parte siano stati ben definiti quegli attributi.
Un insieme può essere determinato *per elencazione* (*principio di estensione*) elencandone gli elementi fra parentesi graffe, per esempio $\{3, 5, 8\}$, eventualmente con puntini di sospensione per indicare elementi non trascritti ma che si suppone il lettore possa capire quali sono, per esempio $\{0, 1, 2, 3...\}$, l'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali*.
Tipici insiemi sono i *singoletti*, come $\{x\}$, $\{diabete\}$, $\{0\}$, eccetera, con un solo elemento.
Gli insiemi si possono anche rappresentare (*principio di astrazione*) con la *proprietà caratteristica*, cioè *caratterizzante*, degli elementi, per esempio $\{x \in I\!\!N | x \; pari\}$, che magari talvolta scriveremo solo

[2] La questione della menzionata *chiarezza* non è banale, ma qui non la approfondiremo; si noti comunque che, per esempio, i divisori di $1{+}2024^{2025}$ costituiscono un insieme, nonostante possa essere improbo stabilire se qualche determinato numero vi appartenga.

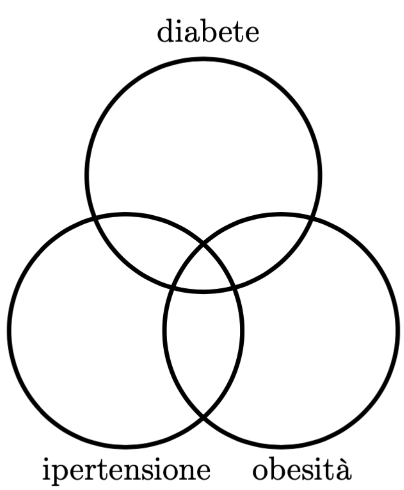
$\{pari\}$, che però potrebbe lasciarci nel dubbio, se non è chiaro dal contesto, che si intendesse $\{x \in \mathbb{Z} | x\, pari\}$, comprendendo per esempio -8. Il simbolo $|$ si legge “tale che" e altre volte si scrive : o t.c.. Naturalmente gli insiemi poi possono rappresentarsi graficamente con ovali racchiudenti i loro elementi (*diagrammi di Eulero-Venn*).

Alcuni Autori distinguono i diagrammi di Eulero da quelli di Venn: si vedano le figure 1 e 8 nell'articolo[3] scientifico
Applying Euler Diagrams and Venn Diagrams to Concept Modeling
Invece in questo testo entrambe le rappresentazioni verranno considerate di Eulero-Venn.

4.2 Esempio: comorbidità

ESERCIZIO$_\mu$ $*$ Rappresentare coi diagrammi di Eulero-Venn la situazione che si forma considerando le 3 patologie diabete, ipertensione e obesità, e poi si elenchino i 7 casi possibili di malattia, singola o multipla, che si evidenziano nel diagramma, a partire dal caso peggiore, “ha diabete e ipertensione e obesità", e finendo con “ha solo diabete".

SVOLGIMENTO



ha diabete e ipertensione e obesità
ha diabete e obesità ma non ipertensione
ha diabete e ipertensione ma non obesità
ha ipertensione e obesità ma non diabete
ha solo obesità
ha solo ipertensione
ha solo diabete

Per le 7 diverse categorie di pazienti potrebbero essere previste terapie diverse.

[3]Lyalin D., Bus Rules J. 2020 Feb;21(2):c021. PMID: 35440915; PMCID: PMC9014965.

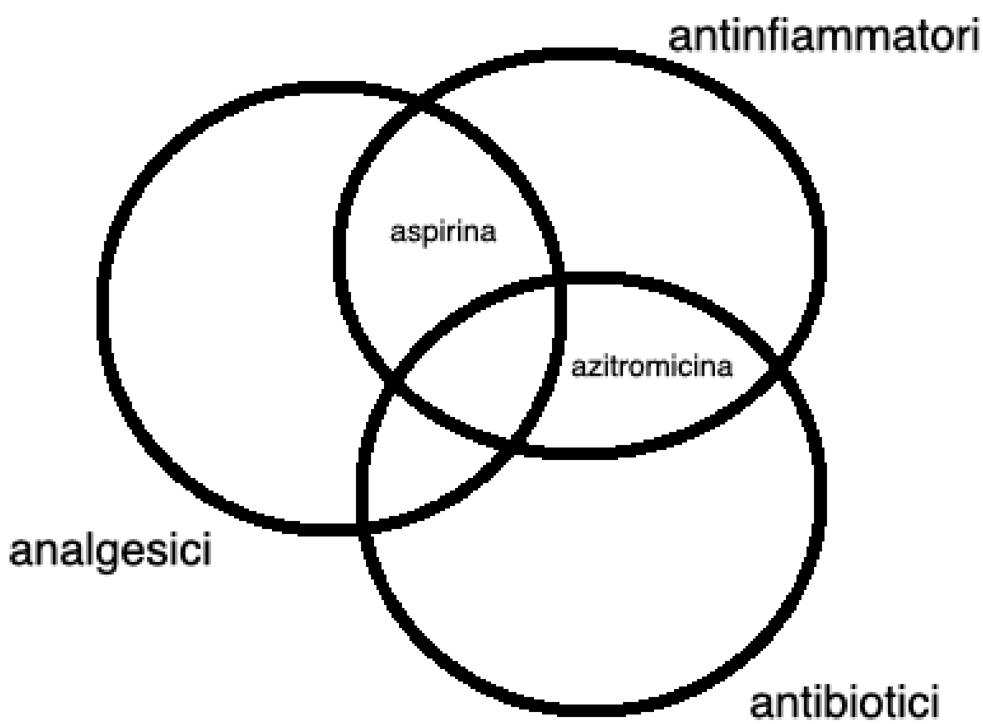
4.3 Esempio: proprietà farmacologiche

Proprio come sopra, si possono considerare 3 cerchi, ciascuno corrispondente a una di queste proprietà farmacologiche dei vari principi attivi:

antibiotici, antinfiammatori, analgesici.

Per esempio l'azitromicina è un antibiotico antinfiammatorio. Ma alcuni sottoinsiemi sono vuoti: non esistono antibiotici specificamente classificati come analgesici.

Arricchisca il Lettore il sottostante diagramma di Eulero-Venn con altri principi attivi.



4.4 Uguaglianza; insieme vuoto; inclusione

Due insiemi si dicono uguali se hanno gli stessi elementi. Anche se hanno diverse definizioni, per esempio

$$X := \{divisori\, di\, 6\} = \{1, 2, 3, 6\} =$$

$$= Y := \{numeri\, di\, 3\, lettere\, in\, italiano\}$$

Esiste un unico insieme privo di elementi, l'*insieme vuoto*, denotato a stampa $\varnothing$ o, scrivendo a mano, qualcosa come ϕ.

Se ogni elemento di X appartiene a Y si dice che X è *contenuto* in Y:

$$X \subseteq Y \qquad \text{(equivalente a } Y \supseteq X\text{, contiene)}$$

Esempi.

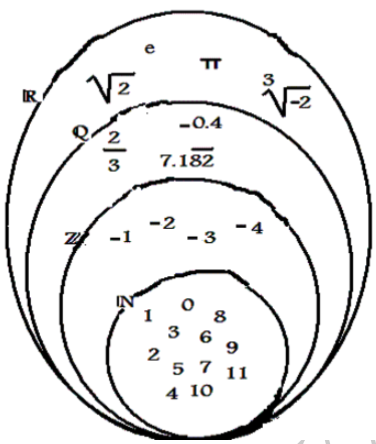
{titolari tessera fedeltà farmacia} ⊆ {aventi diritto allo sconto}
{invalidi} ⊆ {aventi diritto allo sconto} ⊆ {umanità}
(Si faccia attenzione che ci possono essere invalidi titolari di tessera fedeltà).

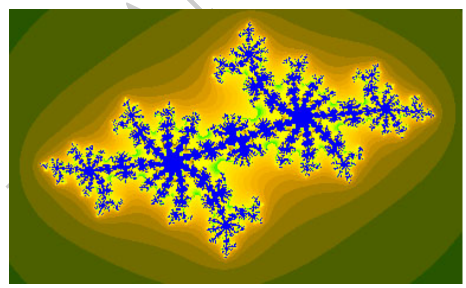
4.5 Gli insiemi numerici

È

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

e ovviamente $\subsetneq$ indica l'inclusione che esclude l'uguaglianza: per esempio $\mathbb{Q}$ è *contenuto propriamente* in $\mathbb{R}$.





Un *soprainsieme* proprio di $\mathbb{R}$ è l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*, dei quali non ci occuperemo: $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ si formano facilmente "grafici" di spettacolare bellezza, i *frattali*, come l'Insieme di Julia in figura.

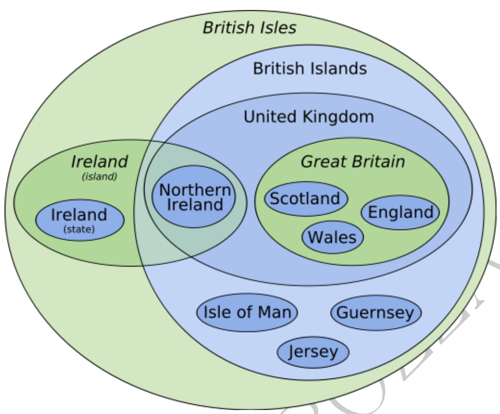
4.6 Cardinalità, insiemi finiti e infiniti

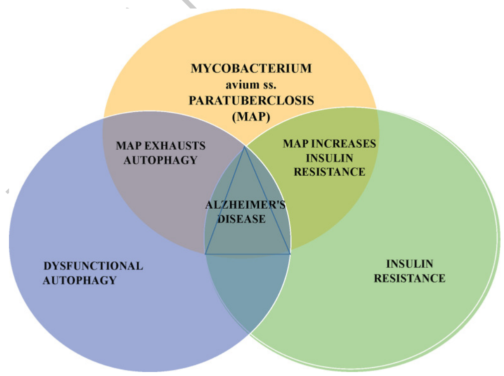
In questa trattazione elementare la *cardinalità* di un insieme finito è il numero dei suoi elementi.
La cardinalità è indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$).
Per esempio $\#\{a, b, c\} = 3$.
Supponiamo noti i concetti di insieme finito e insieme infinito.

4.7 Estensioni.

Il seguente diagramma geografico è molto chiaro ed esplicativo (in azzurro determinazioni giuridiche, in verde determinazioni geografiche) ma non corrisponde esattamente alle definizioni che abbiamo dato: United Kingdom ha sia i 2 elementi Great Britain e Northern Ireland, che i 4 elementi England, Wales, Scotland, Northern Ireland.

Anche il diagramma di argomento medico è alquanto chiaro ma non corrisponde esattamente alle definizioni che abbiamo dato.





Da: Front Immunol. 2021; 12: 714179

By: Coad Thomas Dow

4.8 Insieme delle parti

L'insieme delle parti $\mathscr{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. (Compresi ovviamente l'insieme vuoto e A stesso). In simboli

$$\mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\} .$$

L'insieme delle parti di A si chiama anche *insieme potenza* di A.
Trattazione elementare valida per i soli insiemi finiti.
Per esempio se $A := \{a, b, c\}$ allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} .$$

Se un insieme ha n elementi allora (teorema) il suo insieme delle parti ha 2^n elementi. Cioè, usando il simbolo # della cardinalità, qua nel significato semplice di *numero di elementi*,

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A}\,.$$

Nell'esempio $\mathscr{P}(A)$ ha 8 elementi, cioè 2^3, perché A ha 3 elementi. È possibile una trattazione ad un livello superiore, valida per tutti gli insiemi, finiti e infiniti.

ESERCIZIO$_\mu$ Supponiamo che ad un farmacista, cui normalmente arrivano un centinaio di persone al giorno, una volta ne arrivino un migliaio, lamentando svariati sintomi fra una mezza dozzina di sintomi. Volendo individuare l'insieme di sintomi più caratteristico della nuova situazione, per affrontarla validamente, si propone di elencare tutti i possibili sottoinsiemi di sintomi, da 2 sintomi fino a 6 sintomi. Quanti elementi avrà questa lista di liste di sintomi?

SVOLGIMENTO[4]

I sottoinsiemi dell'insieme di 6 sintomi sono (insieme delle parti) 2^6 ma dobbiamo escludere i 6 insiemi costituiti da 1 solo sintomo e 1 insieme costituito da 0 sintomi (l'insieme vuoto) e allora in tutto

$$2^6 - 6 - 1 =$$

(che naturalmente significa $(2^6 - 6) - 1$: cioè in assenza di parentesi facciamo le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, non faremo certo prima $6 - 1$, che produrrebbe un errore, bensì prima $(2^6 - 6)$)

$$\boxed{57}$$

[4]Ecco per completezza alcuni elementi della lista con 57 liste di sintomi, denotati con S1,...,S6:

S1 S2 ← 1^ lista
S1 S3
...
S1 S6
S2 S3
S2 S4
...
S5 S6
S1 S2 S3
S1 S2 S4
...
S1 S2 S3 S4 S5 S6 ← 57^ lista.

4.9 Operazioni insiemistiche e logiche a confronto

Si veda
https://www.shutterstock.com/it/image-vector/sets-theory-basic-opera
Consideriamo gli insiemi come sottoinsiemi di un *insieme universo*, in generale chiamato U ma non necessariamente:
per esempio $\mathbb{N}$, oppure $\mathbb{R}$,
oppure {clienti della nostra farmacia}
oppure {residenti in Italia}.

Insieme complementare di 1 insieme:
$A^C := \{x \in U | x \notin A\}$ cioè $\neg(x \in A)$. Denotato anche A', $\sim A$, $\overline{A}$.

Insieme intersezione di 2 insiemi:
$A \cap B := \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$

Insieme unione di 2 insiemi:
$A \cup B := \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$

Insieme differenza simmetrica di 2 insiemi:
$A \Delta B := \{x \in U | x \in A \, aut \, x \in B\}$

Si hanno allora queste 4 corrispondenze([5]) fra insiemistica e logica:
^{C} $\neg$
$\cap$ $\wedge$
$\cup$ $\vee$
Δ aut

[5]Valgono queste ulteriori corrispondenze fra simboli insiemistici e logici:
2 *involuzioni*:
$(A^C)^C = A$
$\neg(\neg p) = p$
4 *proprietà distributive* (corrispondentisi a coppie)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2 proprietà associative, 2 Leggi di De Morgan, che il lettore interessato troverà facilmente, eccetera.

Si definisce poi l'*insieme differenza* di 2 insiemi:
$A \setminus B := \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

Due insiemi si dicono *disgiunti* se hanno intersezione vuota.
Per esempio
$\{italiani\,sani\}$ e $\{italiani\,diabetici\}$
$\{colesterolo \leq 200\}$ e $\{colesterolo > 200\}$ (sottinteso, "persone con", e l'unità di misura è pure sottintesa, e anche l'insieme universo, che potrebbe essere quello degli italiani, degli europei, degli esseri umani... dipende dal contesto considerato).

Si definisce *partizione* di un insieme una sua suddivisione in sottoinsiemi disgiunti. Quella soprascritta dei sani e dei diabetici non dà certo una partizione dell'insieme $\{italiani\}$, ma quella secondo colesterolemia sì, come pure
$\{\{sani\}, \{malati\}\}$
$\{\{poveri\}, \{benestanti\}, \{ricchi\}\}$
$\{\{bambini\}, \{adolescenti\}, \{adulti\}, \{anziani\}\}$
(al solito, supposti ben definiti i termini) tutte di evidente interesse epidemiologico.

4.10 Nota sull'insiemistica

L'insiemistica – che trattatiamo al livello minimo per gli scopi della Farmacia – è materia sottile, che raggiunge vertici di inverosimile complessità. Già migliaia di anni fa sono emersi problemi che a tutt'oggi sono studiati intensamente:

Il barbiere del villaggio, colui che rade coloro
che non si radono da sè, si rade da sè?

Suggerimento: si evitino insiemi che contengono se stessi come elemento:

$$\alpha \in \alpha$$

4.11 Predicati e insieme di verità

Versione breve.
Un predicato è una sorta di proposizione
ma con una o più varia-
bili, le quali potranno essere denotate
con qualunque lettera e in particolare x, y, z..., come per esempio:
$q(x) :=$ "x è iperteso".
L'*insieme di verità* di un predicato
è il sottoinsieme del dominio in cui il predicato è vero.

Un predicato è una sorta di proposizione ma con una o più variabili, le quali potranno essere denotate con qualunque lettera e in particolare x, y, z..., come per esempio

$$q(z) := \text{"}z \text{ è sano" (si supponga definito il concetto)}$$

$$p(z) := \text{"}z \text{ è una retta obliqua del piano cartesiano"}$$

$$r(z) := \text{"}z \text{ ha diritto allo sconto del 10\%"}$$

che di per sè non sono nè vere nè false, dipende da z. Per esempio

$$q(\text{Asdrubala}) \text{ è vera (speriamo per lei, è un caso ipotetico)}$$

$$p(\text{asse } x) \text{ è falsa}$$

$$p(\text{bisettrice del I e III quadrante}) \text{ è vera}$$

([6])

L'*insieme di verità* di un predicato è il sottoinsieme del dominio in cui il predicato è vero.([7])

---

[6] Ecco altri predicati, col loro dominio:
$x \in \mathbb{N}$, $p_1(x) :=$"x è un numero pari" ($p(-8)$ non ha senso)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_2(x) :=$"x è un numero pari" ($p(-8)$ è vera)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_3(x) :=$"$x^2 = 2$"
$x \in \mathbb{R}^+$, $p_4(x) :=$"$x^2 = 2$" ($\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei reali positivi)
$x \in \mathbb{R}$, $p_5(x) :=$"$x^2 = 2$"
$x \in$ {residenti in Italia}, $q_1(x) :=$"x è sano" (si supponga definito)
$x \in$ {residenti in Italia}, $q_2(x) :=$"x è diabetico" (come sopra)
$x, y \in \mathbb{Z}$ $t_1(x, y) :=$"x divide y"
$x, y \in$ {residenti in Italia} $t_2(x, y) :=$"x e y sono coniugi"

[7] Insiemi di verità relativi alla nota precedente:
insieme di verità di p_3: $\varnothing$
insieme di verità di p_4: $\{\sqrt{2}\}$
insieme di verità di p_5: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4.12 Quantificatori

Esistono questi 2 *quantificatori*, dal significato ovvio:
quantificatore *per ogni*, $\forall$
quantificatore *esiste*, $\exists$

Riprendendo la $q(z)$ dell'esser sano, di cui sopra, certamente

$$(\exists\, t \in \{\text{esseri umani}\})q(t)$$

cioè esiste (almeno) un sano.
Riprendendo la $r(z)$ del diritto allo sconto, di cui sopra, potrebbe darsi il caso che

$$(\forall x \in \{invalidi\})r(x)$$

cioè che ogni invalido abbia diritto allo sconto del 10%.
Naturalmente si possono considerare esempi matematici.[8]

Indicheremo con $\exists!$ l'espressione "esiste un unico"

4.13 Esempi sui quantificatori e controesempio.

Versione breve.
Il *controesempio* è un esempio che dimostra falsità.

È molto usato nelle dimostrazioni matematiche.
Esempio:
Proposizione falsa:
Ogni quadrilatero equilatero è equiangolo.
Dimostrazione della falsità:
Si considera il controesempio del rombo non quadrato,

[8] Qua si fa riferimento ai predicati definiti in una nota precedente.

Esempio 1:
"$(\exists x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione vera
Esempio 2:
"$(\forall x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione falsa
Esempio 3:
"$(\exists x \in \mathbb{Z})\, t_1(x, y)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre vero, cioè vero $\forall y \in \mathbb{Z}$)
Esempio 4:
"$(\forall x \in \mathbb{Z})\, t_1(x, y)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre falso, cioè falso $\forall y \in \mathbb{Z}$)

il quale è un quadrilatero equilatero non equiangolo.
Abbiamo allora il teorema vero:
Per ogni quadrilatero, equilatero $\not\Rightarrow$ equiangolo.

Per ogni triangolo, equilatero implica equiangolo: teorema vero.
Per ogni triangolo, equiangolo implica equilatero: teorema vero.
Per ogni quadrilatero, equilatero implica equiangolo: teorema falso.
Non dimostreremo i 2 teoremi veri; sono poco utili in Farmacia, e la dimostrazione è addirittura inutile. Ma impariamo la logica.

Dimostriamo invece il teorema falso con un controesempio: consideriamo un rombo non quadrato, ed esso è proprio un quadrilatero equilatero (ma) non equiangolo.

Il *controesempio* è un esempio che dimostra falsità. È molto usato nelle dimostrazioni matematiche.
Esempio.
Proposizione falsa: ogni quadrilatero equilatero è equiangolo. Dimostrazione della falsità: si considera il controesempio del rombo non quadrato, il quale è unquadrilatero equilatero non equiangolo.
Abbiamo allora il teorema vero:
Per ogni quadrilatero, equilatero $\not\Rightarrow$ equiangolo.

Col simbolo *non implica* scriviamo un teorema vero:
Per ogni quadrilatero, equilatero $\not\Rightarrow$ equiangolo.

Esempio in Medicina, anzi in effetti in Statistica Medica:

> the scientific story of COVID-19 conflicts with the widespread view of science as a source of certainties. For the general public, if something is described by an equation, it is exact. Epidemiological modelling is a dramatic counter-example. https://www.nature.com/articles/s42254-020-0188-2.pdf

(Le affermazioni matematiche sono *assolutamente vere per l'eternità*, ma i modelli matematici – che sono equazioni – descrivono una realtà loro propria che solo parzialmente la realtà segue; l'implicazione

"il futuro dell'epidemia è descritto da una formula ⇒ sarà così"
è stata rivelata falsa dal controesempio dell'epidemia del 2020.)

4.14 Regole di negazione

La negazione di
"(tutti) i paperopolesi sono onesti"
non è
"(tutti) i paperopolesi sono disonesti", no, affatto!
bensì
"esiste (almeno) un paperopolese disonesto".

Cioè, in simboli e più in generale,
$\neg((\forall x \in E)p(x)) = (\exists x \in E)\neg p(x)$
e vale anche l'altra negazione
$\neg((\exists x \in E)p(x)) = (\forall x \in E)\neg p(x)$

4.15 Esempi di negazione

Facciamo 2 negazioni usando il linguaggio naturale, scrivendo "malato" invece di "non sano" e similmente poi per le malattie "incurabili".

La negazione di
tutti gli italiani sono sani
è
esiste almeno un italiano non sano;
diciamo pure:
esiste qualche italiano malato.

La negazione di
per ogni malattia esiste una cura
è
esiste almeno una malattia tale che non esiste la cura (diciamo pure, incurabile).
@ *Questo argomento non è capitato agli esami ma capiterà*

4.16 Logica in Matematica e in Farmacia

Una trattazione completa delle attuali conoscenze di Logica riempirebbe parecchi corsi universitari.
È una branca della Scienza che è studiata fin dall'antichità. Il sillogismo, in particolare, è un tipo di ragionamento dimostrativo che fu teorizzato per la prima volta da Aristotele; ecco un esempio:

(premessa maggiore) Tutti gli uomini sono mortali
(premessa minore) Tutti i greci sono uomini
(conclusione) Tutti i greci sono mortali.

Il sillogismo fu molto approfondito nel medioevo, ammettendo 256 tipi di sillogismi, di cui 4 privilegiate, dette Barbara, Celarent, Darii, Ferio.
Fin dall'antichità sono emersi paradossi logici vari, molto problematici. Nel '900 Gödel ha dimostrato una cosa per certi versi drammatica, che esistono cose vere non dimostrabili. ☹

La trattazione della Logica che si è potuta fare al livello di questo testo elementare vorrebbe insegnarci

a ragionare bene

oppure in subordine almeno

a non ragionare male. (Meglio tacere piuttosto).

4.17 Il triste caso del monossido di diidrogeno

Più del 90% delle migliaia di persone morte a Milano nel dicembre 2015 era entrata in contatto con quantità significative di monossido di diidrogeno nelle 24 ore precedenti la morte, ma **questa affermazione vera non implica alcuna indicazione di pericolosità del monossido di diidrogeno**.
Che infatti nessuno bandisce.([9])

Diffidare dai "ragionamenti a parole".

Non è logica ma pseudo-scienza.

[9] Ci mancherebbe proprio: è l'acqua.

La Scienza moderna, che è sperimentale, inizia idealmente con l'esperimento di Galileo Galilei sulla torre di Pisa:

è ovvio (?) che di una palla di piombo e una di creta di uguali dimensioni, lasciate cadere giù, quella di piombo arriva a terra prima.
È ovvio. E infatti così affermava la Scienza antica, aristotelica. Ora, sembrerà anche una cosa ovvia, però non è vera: arrivano a terra insieme, e l'esperimento lo mostra.
Addirittura, su un corpo celeste privo di aria e quindi di attrito con essa, non è nemmeno necessario che i 2 oggetti siano sfere uguali:

https://www.youtube.com/watch?v=ZVfhztmK9zI

È proprio questa esigenza di razionalità che genera l'attuale spinta verso la "Medicina Basata sulle Evidenze", cioè in pratica sulla Statistica Medica.
(Però, come spesso, ogni 10 passi avanti che l'umanità fa, ne fa 9 indietro, e alla fine il progresso è molto minore delle aspettative; nel caso della medicina basata sulle evidenze si potrebbe scrivere un libro intero, ma diciamo molto sinteticamente che è sì molto bello appoggiarsi a statistiche, ma il tutto finisce per funzionare male se ci si attacca a 1 solo parametro per valutare la performance di un atto medico; se statisticamente l'iperglicemico migliora nel 90% dei casi in 1 anno, ma nel 20% dei casi in muore in 10 anni, il vantaggio diventa dubbio).

L'esempio seguente è farmaceutico.

L'evitamento medicale di malattie mortali

Molti credono che evitare farmacologicamente e/o chirurgicamente una malattia che causa morte riduca la mortalità.

E dove sta scritto? È uno pseudoragionamento a parole.

Che effettivamente quella terapia riduca la mortalità andrà di-

mostrato scientificamente, per esempio con uno **studio prospettico randomizzato in doppio cieco.**
Non con il predetto pseudo-ragionamento, ritenuto logico, che evitare una malattia che causa morte riduca la mortalità.
Fra i vari esempi possibili si consideri il seguente, che ha suscitato clamore mediatico anche in riferimento all'attrice Angelina Jolie.

Esistono mutazioni genetiche (BRCA1 e BRCA2) che rendono *enormemente* più probabile il cancro al seno.

Asportare quasi del tutto il seno evita quasi del tutto quel cancro.

Ma si riduce la mortalità? Leggiamo in un articolo scientifico:([10])

> (...) bilateral risk-reducing mastectomy (BRRM) (...) During a mean follow-up of 10.3 years, 722 out of 1712 BRCA1 (...) and 406 out of 1145 BRCA2 (...) underwent BRRM. For BRCA1 mutation carriers hazard ratios were 0.40 for overall mortality (...) For BRCA2 mutation carriers (...) hazard ratio for overall mortality was 0.45

Detto semplificatamente, mortalità doppia fra le operate.

Incidentalmente, si noti che l'impossibilità nel caso specifico di fare uno studio prospettico randomizzato in doppio cieco limita addirittura intrinsecamente la possibilità di raggiungere una certezza sulla questione, se non assoluta almeno del livello di *gold standard* della Medicina e della Farmacia, che è appunto quel tipo di studio.

Ripetiamo: evitare medicalmente la malattia mortale non ha ridotto la mortalità. In quel caso l'ha raddoppiata.

[10]Heemskerk-Gerritsen, Bernadette A M et al. "Survival after bilateral risk-reducing mastectomy in healthy BRCA1 and BRCA2 mutation carriers." Breast cancer research and treatment vol. 177,3 (2019): 723-733. doi:10.1007/s10549-019-05345-2
in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6745043/

Diffidare dai “ragionamenti a parole".

Non è logica ma pseudo-scienza.

Richiedere invece una dimostrazione razionale.
Per esempio nel caso di malattia prevenibile medialcalmente almeno uno studio prospettico randomizzato in doppio cieco su ampio campione, che mostri se ridurre l’incidenza di una malattia eventualmente mortale prevenibile medicalmente riduca effettivamente la mortalità, e non riduca solo la mortalità per quella specifica malattia al prezzo di aumentare la mortalità per tutte le cause, *all causes mortality*. Com’era nell’esempio sopra riportato.

Figure 2: Pillola blu: vivi tranquillo il tuo lavoro di Medico con la mentalità medica antica non-statistica (curare le malattie senza aggiornarti sugli articoli scientifici che esaminano se la terapia allunga o abbrevia la vita, oltre a curare la malattia, che è il *minimo sindacale*).
Pillola rossa: mentalità della Statistica Medica, ti aggiorni sugli articoli scientifici sull’effettiva utilità di un farmaco, al di là della sola guarigione da una malattia, per esempio l’aritmia che causa morte, la cui cura con un certo farmaco *aumentava* (!) la mortalità *per tutte le cause.*

Si noti che non è compito del Medico e del Farmacista fare studi randomizzati prospettici, e neppure solo osservazionali. Loro potrebbero seguire gli articoli scientifici di statistica medica, ma pochissimi spiriti superiori lo fanno. Gli altri vengono informati dagli *informatori scientifici*, che gli dicono ogni bene del farmaco, sulla base magari di 1 solo articolo scientifico, scritto dai ricercatori della casa farmaceutica.

4.18 Prodotto cartesiano

Si chiama *prodotto cartesiano* di 2 insiemi X e Y l'insieme denotato con $X \times Y$ delle *coppie ordinate*(11) (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. In simboli
$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \; et \; y \in Y\}.$$
L'insieme X può essere finito o infinito, e così pure Y.
Se X e Y sono finiti allora (teorema(12), ovvio)

$$\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$$

cioè la cardinalità del prodotto cartesiano di 2 insiemi è il prodotto delle cardinalità dei 2 insiemi. Per esempio

$$\{a, b, c\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$$

ha $2 \cdot 3 = 6$ elementi, che sono coppie ordinate.
Similmente si definisce il prodotto cartesiano di 3 insiemi, composto dalle terne ordinate, e di n elementi, composto dalle n-uple; e si estende banalmente il soprascritto teorema sulle cardinalità.

4.19 Note sul prodotto cartesiano.

Osservato che il prodotto cartesiano di 2 insiemi finiti A e B ha (ovviamente) cardinalità
$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$
e con 3 insiemi finiti

$$\#(A \times B \times C) = \#A \cdot \#B \cdot \#C \text{ e similmente con } n \text{ insiemi}$$

[11] Una definizione rigorosa di coppia ordinata (x, y) è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ma in questa trattazione supponiamo di per sè chiaro il concetto.

[12] Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare qua considerato di *numero di elementi*.

osserviamo che parallelamente, per così dire, se un'azione si può fare in n modi e una seconda azione si può fare in m modi, la sequenza delle 2 azioni si può fare in $n \cdot m$ modi. E la sequenza di 3 azioni in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ modi, eccetera.
ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Calcolare quanti sono i diversi possibili 6-meri dei nucleotidi del RNA ovvero le sequenze ("parole") di 6 lettere dell'alfabeto

$$A, C, G, U$$

(di cui recentemente si è molto scritto riguardo la ricerca contro il cancro).

SVOLGIMENTO
Relativamente alla questione medica, e in futuro eventualmente farmaceutica, si può vedere sul sito governativo statunitense PubMed l'abstract dell'articolo scientifico 6mer seed toxicity in tumor suppressive microRNAs.

Per fissare le idee (ma assolutamente non sarebbe necessario) scriviamo alcune delle sequenze/parole:
AAAAAA, AAAAAC, AAAAAG, AAAAAU,
AAAACA, AAAACC, AAAACG, AAAACU,
...
UUUUUA, UUUUUC, UUUUUG, UUUUUU.

Per calcolare il numero osserviamo che
la 1^ lettera può essere scelta in 4 modi
la 2^ lettera può essere scelta in 4 modi
...
la 6^ lettera può essere scelta in 4 modi
e allora la sequenza di 6 lettere può essere costituita in un numero di modi pari a

$$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$\boxed{4096}$$

Oppure, si potrebbe anche dire che l'insieme delle sequenze/parole è in corrispondenza biunivoca con il prodotto cartesiano

$$\{A, C, G, U\} \times \text{...(in tutto 6 volte)...} \times \{A, C, G, U\}$$

e allora ha cardinalità

$$\left(\#\{A, C, G, U\}\right)^6$$

concludendo come prima.
Tutte le 4096 sequenze sono elencate in https://www.6merdb.org/

ESERCIZIO.$_\mu$ Consideriamo una serie di cassetti in una farmacia etichettati con un codice composto da una lettera (inglese) maiuscola o da una lettera seguita da una cifra (decimale). Quanti sono i possibili cassetti etichettabili?

SVOLGIMENTO
L'insieme dei codici di 2 caratteri è in corrispondenza biunivoca col prodotto cartesiano

$$\{A, B, ..., Z\} \times \{0, ..., 9\}$$

che ha $26 \cdot 10 = 260$ elementi. Considerando anche i 26 codici di un carattere (lettera maiuscola)

$$\boxed{\text{si hanno in tutto 286 possibili cassetti}}$$