

3 Logica delle proposizioni

3.1 Premessa

(Contro)esempi stupefacenti ci indicano che le affermazioni matematiche vanno dimostrate, non basta⁽¹⁾ fare un “mostra e dimostra”.

Le illusioni ottiche ci indicano che è inappropriato usare solo figure per fare dimostrazioni.

Le ambiguità linguistiche ci indicano che è inappropriato usare solo testo libero del linguaggio comune per fare dimostrazioni.

La varietà delle lingue ci induce a cercare un **preciso linguaggio matematico simbolico** che prescindano dalle lingue.

Tutto ciò viene fatto ad un livello molto profondo in Matematica ma in questo testo elementare considereremo solo qualche elemento.

3.2 Introduzione

Prima di tutto consideriamo il simbolo $=$ da intendersi nel senso “è lo stesso elemento”. (Due rette perpendicolari r e s sono senz’altro *uguali* nel senso del linguaggio comune ma dal punto di vista matematico sono *diverse*: $r \neq s$, non è la stessa retta). Per esempio $area_{\Delta} = \frac{1}{2}bh$.

In generale scriveremo 3 varianti del simbolo di uguaglianza:

$:=$ nelle definizioni, per esempio $f(x) := x^2$,

\equiv nelle identità, per esempio $(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$.

$\stackrel{EQ}{=}$ nelle equazioni, per esempio

$(x + 1)^2 \stackrel{EQ}{=} x^2 + 5x + 1$, equazione con (unica) *soluzione* $x = 0$.

¹Per esempio $n^2 + n + 41$ dà un numero primo per $n = 0, 1, 2, \dots, 38, 39$ ma non per $n = 40$. E si consideri la tragica disillusione del [tacchino induttivista](#).

Supponiamo concetto primitivo (noto) le *proposizioni*. Esempi:

2 è pari

3 è pari (non è molto vero ma non importa, è proposizione)

X ha il diabete

Y è iperteso

Introdurremo alcuni simboli logici rigorosi.

Indicheremo con \Rightarrow l'*allora*, ovvero meglio *implica*:

per esempio

$1009 \cdot 2 = 2018 \Rightarrow 2018$ è pari.

Indicheremo con \Leftarrow il *perché*:

per esempio

2018 è pari $\Leftarrow 1009 \cdot 2 = 2018$

Si noti che $p \Rightarrow q$ si può scrivere $q \Leftarrow p$.

Indicheremo con \Leftrightarrow il *se e solo se*

Per esempio:

X triangolo:

equiangolo \Leftrightarrow equilatero

Supponiamo noti il *vero* e il *falso*.

Li denoteremo V e F ma internazionalmente possono trovarsi indicati T e F e in vari altri modi.

Una **congettura (indimostrata)** è un'affermazione che non è dimostrata vera e non è dimostrata falsa. (Ma è creduta vera da qualche persona significativa, sennò non ne parleremmo).

Esempio. Congettura di Goldbach (Eulero e Goldbach, 1742)

ogni numero pari > 2 è somma di 2 numeri primi.

3.3 Connettivi logici

Vedremo 4 *connettivi logici*: *non*, *et*, *vel*, *aut*: il *non* opera su 1 proposizione e gli altri congiungono fra loro 2 proposizioni.

3.4 Connettivo logico non

Tavola di verità del *non* ovvero \neg ovvero \sim ovvero NOT

p $\neg p$ scritto anche \tilde{p} o semplicemente *non p*

V F

F V

Per esempio $p :=$ "3 è pari" ha il *valore di verità* F, \tilde{p} invece V.

\tilde{p} potremo scriverla "non 3 è pari" o meglio "3 non è pari" e in ogni caso è equivalente alla "3 è dispari".

Non è sano. (È malato).

3.5 Connettivo logico et

Continuiamo con l'*et* ovvero \wedge ovvero AND che significa *e*:

"A gennaio sosterrò Matematica e Fisica."

(Se farò solo 1 o 0 di essi mi accuseranno di falsità).

Tavola di verità dell'*et*:

p q p *et* q ... proposizione *composta*

V V V

V F F

F V F

F F F

È iperteso e ha il diabete.

3.6 Connettivo logico vel

Continuiamo⁽²⁾ col *vel* ovvero \vee ovvero OR che significa *o* ovvero *oppure*:

“A gennaio sosterrò Matematica o Fisica.”

(Se sosterrò entrambi nessuno mi accuserà di falsità).

Questa è la tavola di verità del *vel*:

P	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

È iperteso *vel* ha il diabete. (Potrebbe avere entrambe le patologie).

3.7 Connettivo logico aut

Il *vel* è molto diverso dall'*aut*, l'*o esclusivo*, in italiano (linguaggio comune) ugualmente espresso con *o* oppure *oppure* come il *vel*:

“Mi fidanzerò con Asdrubala o Berenice.” Questo *o* è un *aut*.⁽³⁾

Questa è la tavola di verità dell'*aut*:

p	q	$p \text{ aut } q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In Excel in italiano, i 4 connettivi sono NON, E, O, XOR.

²Purtroppo sia il *vel* che l'*et* talvolta vengono resi con una virgola, e *sperabilmente* si capisce il senso dal contesto:

- $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ qua vale \wedge : è il I quadrante, l'insieme dei punti con sia l'ascissa che l'ordinata ≥ 0 ;
- $\{(x, y) | x = \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ qua vale \vee cioè $x = \sqrt{2} \vee x = \sqrt{3}$: sono 2 rette verticali, è ovvio che si richiede che x sia *o* $\sqrt{2}$ *o* $\sqrt{3}$, mica può avere sia l'uno che l'altro valore.

³L'ambiguità notazionale è notevole per tutti gli operatori logici: per l'*aut* Wikipedia in inglese alla voce *Exclusive or* dà 10 simboli.

3.8 I connettivi logici in Farmacia

Esempio 1. In questo testo (non più presente nell'ottobre 2021 ma non importa) dei prestigiosi CDC statunitensi, Centers for Disease Control and Prevention, troviamo un uso tecnico dell'et, scritto AND, e del vel, scritto OR, per la definizione dei criteri clinici di diagnosi del covid:

Clinical Criteria

At least two of the following symptoms: fever (measured or subjective), chills, rigors, myalgia, headache, sore throat, new olfactory and taste disorder(s)

OR

At least one of the following symptoms: cough, shortness of breath, or difficulty breathing

OR

Severe respiratory illness with at least one of the following:

- Clinical or radiographic evidence of pneumonia, **OR**
- Acute respiratory distress syndrome (ARDS).

AND

No alternative more likely diagnosis

Esempio 2. Operatori logici in ricerca bibliografica in database. Leggiamo in un articolo⁽⁴⁾ scientifico:

Search string used to identify publications from each of the four databases used for potential inclusion in the study.

Search string

“‘vaccin* OR inoculat* OR immunization*’ AND ‘Pfizer OR AstraZeneca OR Moderna OR pfizer-biontech OR pfizerbiontech OR bnt162b2 OR mrna-1273 OR ChAdOx1-S OR Oxford AstraZeneca’

⁴Reynolds L, Dewey C, Asfour G, Little M. Vaccine efficacy against SARS-CoV-2 for Pfizer BioNTech, Moderna, and AstraZeneca vaccines: a systematic review. *Front Public Health*. 2023 Oct 24;11:1229716. doi: 10.3389/fpubh.2023.1229716. PMID: 37942238; PMCID: PMC10628441.

AND ‘efficacy OR effective*’ AND ‘COVID-19 OR SARS-CoV-2 OR COVID19* OR COVID OR SARSCOV-2 OR SARSCOV2 OR Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 OR Severe Acute Respiratory Syndrome Corona Virus 2’”.

Naturalmente *vaccin** a sua volta indirizza la ricerca a record contenenti vaccine OR vaccinated OR vaccination...

Esempio 3. In [questo testo](#) della prestigiosa FDA statunitense, Food and Drug Administration, il *vel* è sottinteso, ed è ovvio che si tratti di un *vel* e non di un *et* o altro:

An adverse event is any undesirable experience associated with the use of a medical product in a patient. The event is serious and should be reported to FDA when the patient outcome is:

Death

(...)

Life-threatening

(...)

Hospitalization (initial or prolonged)

(...)

Disability or Permanent Damage

(...)

(seguono altri casi).

3.9 Tautologie e contraddizioni

Si dice *tautologia* una proposizione sempre vera.

Esempio: $p \vee \neg p$

Si dice *contraddizione* una proposizione sempre falsa.

Esempio: $p \wedge \neg p$

Proposizioni *equivalenti*: hanno la stessa tavola di verità.

Esempio: $(p \text{ aut } q) \equiv (p \text{ et non } q) \text{ vel } (q \text{ et non } p)$

3.10 Nota sulla Logica

Lo studio della Logica vorrebbe insegnarci a ragionare correttamente.

Leggiamo su Wikipedia:

Un caso di “non sequitur” è quello che si indica con l’espressione “*Post hoc ergo propter hoc*” (dopo ciò, dunque a causa di ciò), ovvero considerare A causa di B solo perché B segue temporalmente A

. È impressionante l’illogicità usata abitualmente dalle persone che hanno studiato poco – ma ancor più colpisce quella usata da persone di alto grado nelle istituzioni, che hanno responsabilità sulla vita di tutti.

Leggiamo il giorno 15 giugno 2020 sul sito del Ministero della Salute italiano⁽⁵⁾

Mangiare tante arance e limoni previene il contagio perché la vitamina C ha azione protettiva nei confronti del nuovo coronavirus

Falso

Non ci sono evidenze scientifiche che provino un’azione della vitamina C sul virus

Ma allora è congettura indimostrata, e quindi forse è falso ma forse è vero, oppure è certamente falso come sopra affermato?

Al 5 ottobre 2021 il testo risultava modificato; nel 2023 sparito.

⁵<http://www.salute.gov.it/portale/malattieInfettive/dettaglioNotizieMalattieInfettive.jsp?lingua=italiano&id=4276> letto il 15 giugno 2020.

3.11 ESERCIZI SULLA LEZIONE 3

3.11.1 Esercizio risolto a – Sintomi e patologia

μ_{2018} modificato * Una certa condizione patologica X , è diagnosticata se:

c'è il sintomo A

e

c'è il sintomo B oppure (vel) il sintomo C

oppure (vel)

c'è il sintomo D ma non il sintomo A .

Cioè, indicando la negazione con la tilde, con ovvio significato dei simboli,

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (d \wedge \tilde{a}).$$

Indicando con V e F il *vero* e il *falso*, si conduca di passaggio in passaggio il calcolo relativo ad un paziente che ha i soli sintomi A , C , D , concludendo la diagnosi.

(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si ha

sintomo A presente: a è vera, V

sintomo B non presente: b è falsa, F

sintomo C presente: c è vera, V

sintomo D presente: d è vera, V

e si calcola

$$(V \wedge (F \vee V)) \vee (V \wedge \tilde{V})$$

$$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$$

$$V \vee F$$

$$V$$

e in conclusione abbiamo la diagnosi

La condizione patologica X è presente

3.11.2 Esercizio risolto b – Finanziare terapie o no

μ_{2018} * Una certa terapia verrà supportata da un governo se (e solo se) è molto efficace e costa molto

OPPURE se

è solo abbastanza efficace e non costa molto.

(Supponendo in qualche modo determinati i significati precisi dei termini).

Con ovvio significato dei simboli

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q).$$

Nel caso specifico di una terapia che sia solo abbastanza efficace e costi molto si attribuiscono i valori di verità V o F a p , q , r , e si valuti di passaggio in passaggio fino al risultato finale il valore di verità dell'espressione soprascritta, concludendo se la terapia verrà supportata o no.

(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si hanno queste 3 proposizioni, coi loro valori di verità nel caso specifico:

F p = "la terapia è molto efficace"

V q = "la terapia costa molto"

V r = "la terapia è solo abbastanza efficace"

Si ha quindi successivamente

$$(F \wedge V) \vee (V \wedge \neg V)$$

$$F \vee (V \wedge F)$$

$$F \vee F$$

F (falso)

La terapia non verrà supportata

3.11.3 Esercizio risolto c – Sintomatici per il Ministero

μ_{2021} * Supponiamo che dal Ministero arrivi alle Farmacie una circolare che impone di inviargli una segnalazione se arriva un cliente con

tosse O nelle ultime 48 ore febbre oltre $38,5^\circ\text{C}$

E

naso che cola O non vaccinato.

Riconosciuto fra questi 4 il calcolo logico da fare

$$(p \vee q) \wedge (\neg(r \vee s))$$

$$(p \wedge q) \vee (\neg(r \wedge s))$$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg s)$$

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s)$$

lo si svolga, indicando con V il valore di verità vero, con F quello falso, con $?$ quello sconosciuto, fino a determinare se la segnalazione va inviata per un cliente con tosse, naso che cola, vaccinato.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale.

Chiaramente la terza espressione esprime le condizioni poste.

In effetti non sappiamo se il cliente ha avuto febbre oltre $38,5^\circ\text{C}$ nelle ultime 48 ore o no e allora indichiamo con $?$ il valore di verità di q :

$V p$:= "ha la tosse"

$? q$:= "ha avuto febbre oltre $38,5^\circ\text{C}$ "

$V r$:= "ha il naso che cola"

$V s$:= "è vaccinato".

Si ha successivamente

$$(V \vee ?) \wedge (V \vee \neg V)$$

Sia $V \vee V$ che $V \vee F$ danno V , vero,

$$V \wedge (V \vee F)$$

$$V \wedge V$$

$$V$$

La segnalazione va inviata

3.11.4 Esercizio tanto carino quanto difficile

Il Problema dei Cappelli.

Tre persone, A, B e C, sono disposte in fila indiana, cioè A può vedere B e C, B può vedere solo C, e C non può vedere nessuno. Ognuna di loro ha un cappello sulla testa, che può essere di colore rosso o blu. Le persone non possono vedere il proprio cappello e non sanno quante persone indossano un cappello di un certo colore. Il giudice comunica alle tre persone che almeno uno di loro ha un

cappello rosso. Quindi chiede a A: "Puoi dire di che colore è il tuo cappello?" A risponde di no. Lo stesso viene chiesto a B, che risponde anche lui di no. Infine, viene chiesto a C che risponde con sicurezza: "Il mio cappello è rosso."

Come ha fatto C a dedurre il colore del suo cappello?

BOZZA - DRAFT