27 ottobre

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$. Diciamo che f ha un approssimante lineare in corrispondenza al punto x_0 se $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + c(x-x_0)}^{\text{approssimante lineare}} + o(x-x_0)$$

(dove $o(x-x_0)$ è caratterizzato da $\lim_{x \to x_0} \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0$).

Lemma Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Le due proposizioni seguenti sono equivalenti

1) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.
$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + o(x-x_0) \quad .$$

2) $\exists\, f'(x_0)$

Inoltre, quando 1) e 2) sono vere si ha
$$c = f'(x_0).$$

Dim Assumiamo 1), cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.
$$f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0} =$$
$$= c + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \Big[\underbrace{c}_{\substack{\downarrow x\to x_0 \\ c}} + \underbrace{\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow x\to x_0 \\ 0}} \Big]$$
$$= c \implies f'(x_0) = c$$

Abbiamo dimostrato che

$1 \implies$ esiste $f'(x_0)$ ed inoltre $f'(x_0) = c$

Assumiamo 2) quindi esiste
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$* \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}^{g(x)}}{x-x_0} = 0$$

se io ora definisco una nuova funzione
$$g(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

$$** \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + g(x)$$
dove $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = 0 \iff g(x) = o(x-x_0)$

che con $**$ ci dice
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{approssimante lineare}} + o(x-x_0)$$

$\implies f$ ammette approssimante lineare con $c = f'(x_0)$.

Teor (Regola della catena)

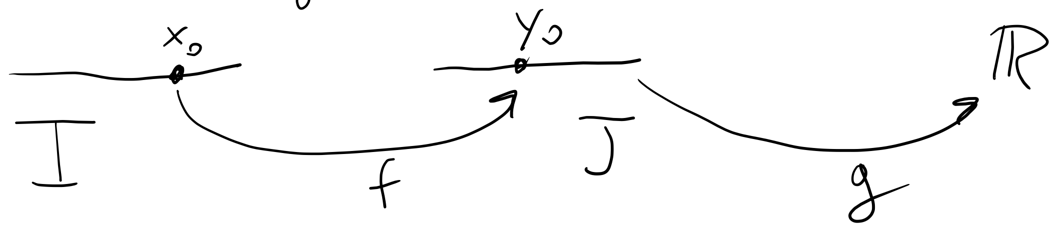
$f : I \to J$

$g : J \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I \,, \quad y_0 = f(x_0) \in J$

supponiamo esistono $f'(x_0)$, $g'(y_0)$ e

consideriamo $g(f(x)) : I \to \mathbb{R}$



Allora
$$\Big(g(f(x))\Big)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0) .$$

Osservazione Se invece di usare la funzione $f(x)$ usiamo una funzione $y(x)$

$$\Big(g(y(x))\Big)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\, y'(x_0)$$

$$\frac{d\, g(y(x))}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dg}{dy}(y_0)\, \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Vogliamo $\qquad y_0 = f(x_0)$

$$(1) \quad \left(g(f(x)) \right)' \Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0)$$

$$\exists\, f' \left\{ g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right) \right\} (x-x_0) \quad (3)$$

$$\exists\, g'(y_0) \iff g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) \quad (2)$$

Dimostreremo

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0) f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\iff (1)$$

Usando 2 per $y = f(x) \quad y_0 = f(x_0)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)\left(f(x) - f(x_0)\right) + o\left(f(x) - f(x_0)\right)$$

ove sostituisco a destra $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ (3)

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)\left[f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right]$$
$$+ o\left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right)$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0) f'(x_0)(x-x_0) +$$
$$+ \left\{ g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\left(f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\right) \right\}$$

Ove affermo che

Dimostreremo ora che

$$(4)\quad \left\{ g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big) \right\} = o(x-x_0)$$

Se questo è vero avremo ottenuto che

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0) f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

Questo implicherà $\left(g(f(x))\right)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0) f'(x_0)$

Per dimostrare la formula (4) devo dimostrare

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g'(y_0)\, o(x-x_0) + o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{x-x_0} = 0$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[g'(y_0) \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} + \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{x-x_0} \right]$$

$g'(y_0) \xrightarrow{x\to x_0} g'(y_0)$, $\quad \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{x-x_0} = 0$$

Qui ci sono due casi. Se $f'(x_0)\neq 0$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)} \quad \frac{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}$$

Qui $f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) = (x-x_0)\left[f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right]$

$f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0$, $\quad \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)} \frac{\cancel{(x-x_0)}\left[f'(x_0)+\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right]}{\cancel{x-x_0}}$$

$\xrightarrow{x\to x_0} 0$, $\quad \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)$

$= 0$

Abbiamo dimostrato

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\big)}{x-x_0} = 0$$

se $f'(x_0)\neq 0$

Nel caso $f'(x_0) = 0$ si ha anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o\big(o(x-x_0)\big)}{x-x_0} = 0$$

$$\frac{o\left(\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)}{x-x_0} = \frac{\cancel{(x-x_0)}\, o\left(\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right)}{\cancel{(x-x_0)}}$$

$$\lim_{x\to x_0} o\left(\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = g'(f(x))\, f'(x).$$

$g(y) = e^y$ $\qquad$ $g(f(x)) = e^{f(x)}$

$g'(y) = e^y$

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)}$$

$x > 0$

$(x^x)'$

$\boxed{(e^x)' = e^x}$ $\qquad$ $a > 0$

$$(a^x)' = \left(e^{\lg(a^x)}\right)' = \left(e^{x \lg a}\right)'$$

$$= e^{x \lg a}(x \lg a)'$$

$$= e^{x \lg a} \lg a$$

$$= a^x \lg a$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \lg a}.$$

$10^x = e^{x \lg 10}$ $\qquad$ a^x $\qquad$ x^a

$$(x^x)' = \left(e^{\lg x^x}\right)' = \left(e^{x \lg x}\right)' =$$

$$= e^{x \lg x}(x \lg x)'$$

$$= x^x \left((x)' \lg x + x (\lg x)'\right)$$

$$= x^x \left(\lg x + x \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x (\lg x + 1)$$

Ci ricordiamo che abbiamo ottenuto

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

come conseguenza della regola del prodotto e di

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \times$$

Verifichiamo $\times$

$$g(x), \qquad G(y) = \frac{1}{y} = y^{-1}$$

$$\frac{1}{g(x)} = G(g(x)) \qquad G'(y) = \left(y^{-1}\right)' = -\frac{1}{y^2}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = G'(g(x))\ g'(x) = -\frac{1}{g^2(x)}\,g'(x)$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{1+x^{-2}}}{\lg(1+x^2)}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{1+x^{-2}}\right)' \lg(1+x^2) - \left(x+\sqrt{1+x^{-2}}\right)\left(\lg(1+x^2)\right)'}{\lg^2(1+x^2)}$$

$$\left(x+\sqrt{1+x^{-2}}\right)' = \left(x+(1+x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= (x)' + \left((1+x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 1 + \left((1+x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)'$$

dove $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$ $\qquad g'(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow (1+x^{-2})^{\frac{1}{2}} = g(1+x^{-2})$

$$\left((1+x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right)' = g'(1+x^{-2}) \quad (1+x^{-2})'$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}} \quad (-\cancel{2})\, x^{-3}$$

$$= -(1+x^{-2})^{-\frac{1}{2}} x^{-3}$$

$$\left(\lg(1+x^2)\right)' = \lg'(1+x^2) \quad (1+x^2)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \qquad 2x$$

$$a = e^{\lg a}$$

$$f(x) = x^{x^x} = e^{\lg\left(x^{x^x}\right)} =$$

$$= e^{x^x \lg x} = e^{e^{x\lg x}\lg x}$$

$$x^x = e^{\lg\left(x^x\right)} = e^{x\lg x}$$

$$f(x) = e^{e^{x\lg x}\lg x}$$

$$f'(x) = f(x)\left(\underbrace{e^{x\lg x}}_{x^x}\lg x\right)'$$

$$= x^{x^x}\left(\left(e^{x\lg x}\right)'\lg x + e^{x\lg x}(\lg x)'\right)$$

$$= x^{x^x}\left(x^x\,(x\lg x)'\lg x + x^x\,\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{x^x}\,x^x\left(\left(\lg x + x\frac{1}{x}\right)\lg x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{x^x}\,x^x\left((\lg x + 1)\lg x + \frac{1}{x}\right)$$