

LIMITI DI FUNZIONI

Sia $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che una funzione f sia definita su $]a, b[$ oppure su $]a, b[\setminus \{x_0\}$.

Sia $l \in \mathbb{R}$.

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff$

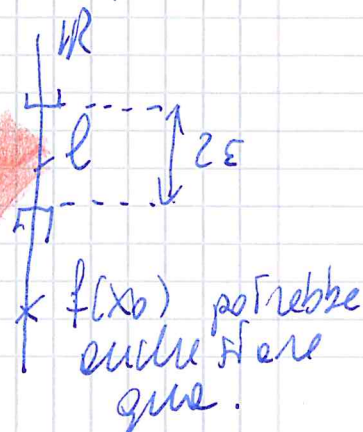
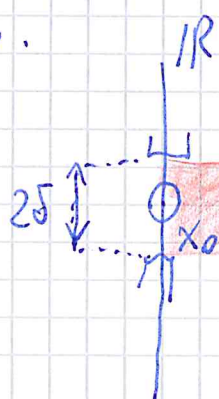
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $0 < |x - x_0| < \delta$,

allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ disuguaglianza stretta!

(Si legge: il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è l).

ATTENZIONE: se f è definita anche in x_0 , il suo valore in $f(x_0)$ non gioca nessun ruolo nella definizione di limite. Infatti non è nemmeno necessario che f sia definita in x_0 .



$f(x_0)$ potrebbe anche essere qui.

(68)

N.B.

f is continuous in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

ESEMPLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}$
 definite on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Si dice che

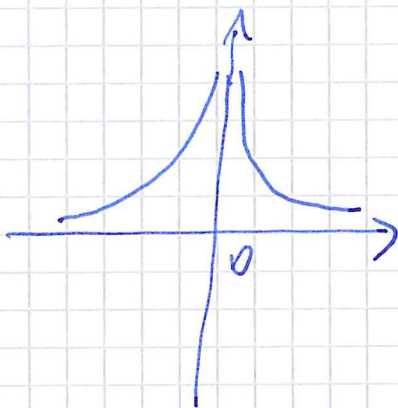
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$\iff \forall M > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta$,
 si ha $f(x) > M$.

Esempio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$



Limite destro e sinistro

Se f è definita su $]a, x_0]$ o su $]a, x_0[$ e $l \in \mathbb{R}$, si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$\text{e } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ allora}$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon. \quad (\text{limite sinistro})$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

Analogamente si definisce il limite destro, quando f è definita su

$$]x_0, b[\quad \text{o} \quad [x_0, b[$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\text{t.c. e } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ allora } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(70)

Se ho $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$

oppure se $f:]a, b[\setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

posso considerare separatamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l^+$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^-.$$

Se $l^+ = l^-$ allora esiste anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+ = l^-.$$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

In questo caso esiste $\lim_{x \rightarrow 0^+}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-}$
ma non esiste $\lim_{x \rightarrow 0}$.

Anche per i limiti destro e sinistro,
definiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0$$

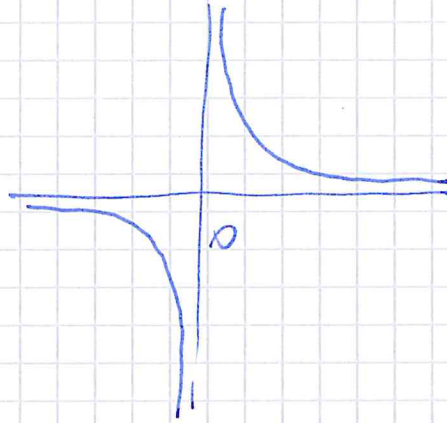
t.c. se $x_0 < x < x_0 + \delta$,

$$\text{allora } f(x) > M$$

eccetera.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(72)

Limiti per $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$.

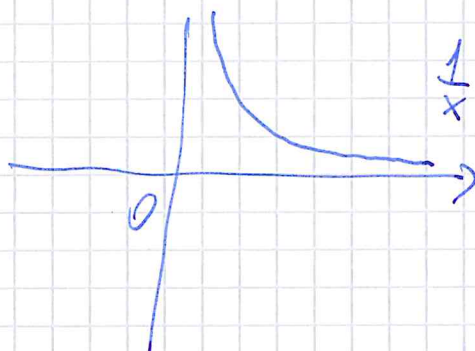
Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k > 0$$

t.c. se $x > k$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Esempio : $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



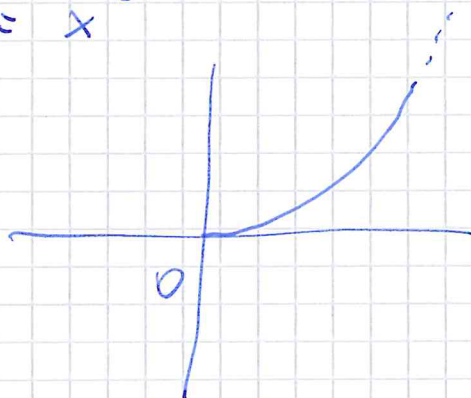
Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists k > 0$$

t.c. se $x > k$ allora $f(x) > M$.

Esempio $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$



ESEMPI VARI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ non esiste, perché $\sin x$ oscilla infinite volte tra $+1$ e -1 quando $x \rightarrow +\infty$.

74

Regole per il calcolo dei limiti

1) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$$

l_1 e $l_2 \neq 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

2) come sopra, per $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e se

g è definita in un intervallo $[a, b]$ con $l \in [a, b]$ ed è continua in tale intervallo,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l)$

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x^2+x}{x}} = e^1 = e$

4) stessa cosa per $x \rightarrow +\infty$.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ e g è continua in l

allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = g(l)$

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

5) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

6) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

7) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

8) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

con $g(x) > 0$ vicino a x_0 , allora

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

76

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty$$

FORME INDETERMINATE

Sono situazioni da studiare caso per caso.

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(idem per $x \rightarrow +\infty$)

quando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(idem per $x \rightarrow +\infty$)

quando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x)$$

(idem per $x \rightarrow +\infty$)

quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

ESEMPIO

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{\log_3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 3 \cancel{\log_3 x}}{\cancel{\log_3 x}} = \log_2 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(3-2)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \rightarrow +\infty} \quad (77)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= 0$$

