Calcolare A^{-1} tramite il determinante

D: Cosa possiamo dire del determinante dell'inversa?
R: Usiamo il teorema di BINET ← "IL DETERMINANTE DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI DETERMINANTI"
Se A invertibile:

$$I_n = A \cdot A^{-1} \Rightarrow 1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \overset{\text{BINET}}{=} \overset{K}{\det(A)} \cdot \underbrace{\overset{K}{\det(A^{-1})}}$$

NON PUÒ ESSERE ZERO PERCHÉ A È L'INVERSA DELLA SUA INVERSA $\Rightarrow A^{-1}$ INVERTIBILE $\Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$. MA ANCHE PERCHÉ UN CAMPO NON HA ZERO-DIVISORI.

Da cui:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\boxed{\text{PROP}}$ $A \cdot {}^t(\mathrm{cof}(A)) = \det(A) \cdot I_n$

In particolare, nel caso in cui $\det(A) \neq 0$ (ovvero $\exists A^{-1}$) allora si può CALCOLARE L'INVERSA ESPLICITAMENTE COME:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\mathrm{cof}(A))}$$

← MOLTO UTILE ⚠

DIM.: Possiamo riscrivere la tesi $I_n \cdot \det(A) = A \cdot {}^t(\operatorname{cof}(A))$ espandendo il prodotto riga per colonna:

$$\forall i,j: \det(A) \cdot \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\operatorname{cof}(A))_{jk} \overset{\text{DEF DI COFATTORE}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \det\Big(\underbrace{A^{(\hat{k})}_{(\hat{j})}}_{=A_{jk}}\Big)$$

Dato che abbiamo δ_{ij} nell'espressione, distinguiamo $i=j$ e $i \neq j$.

CASO $i=j$: Allora troviamo $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$ che è proprio la **Def 2** **[Laplace per righe]**.

CASO $i \neq j$: Allora troviamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) = \det\Big(A\big(\overbrace{A_{(i)} \mapsto A_{(j)}}^{\text{NON È UN'OPERAZIONE ELEMENTARE!}}\big)\Big) \overset{\text{COR SOPRA PUNTO ii)}}{=} 0$$

ABBIAMO SOSTITUITO ALLA i-ESIMA RIGA LA j-ESIMA RIGA, QUINDI LA MATRICE RISULTANTE HA DUE RIGHE **UGUALI**, E QUINDI IN PARTICOLARE DUE RIGHE **PROPORZIONALI**.

$\square$

Esempio: $n=2$ [Dimostrazione della formula 2×2]

PRESENTATA ALL'INIZIO DEL CORSO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

USIAMO FORMULA PER DETERMINANTE & CALCOLIAMO MATRICE **COFATTORE(A)**.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t\mathrm{cof}(A) = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \cdot {}^t\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

TRASPONIAMO

$\boxed{\text{COR}}$ $\det(\operatorname{cof}(A)) = \det(A)^{n-1}$ [se $\exists A^{-1}$]

Dim.: Applicando la proposizione sopra e le varie proprietà del determinante che abbiamo visto:

$$\det(A)^{-1} \underset{\uparrow}{=} \det(A^{-1}) \underset{\uparrow}{=} \det\left[\frac{1}{\det(A)}\,{}^t\!\operatorname{cof}(A)\right] \underset{\uparrow}{=} \left(\det(A)^{-1}\right)^n \cdot \det\left({}^t\!\operatorname{cof}(A)\right)$$

COROLLARIO DI BINET

det(PROPOSIZ. SCORSA)

LO SCALARE $\det(A)$ MOLTIPLICA **OGNUNA DELLE n COLONNE**

$\det({}^tB) = \det(B)$

$$= \det(A)^{-n} \cdot \det(\operatorname{cof}(A))$$

Quindi moltiplicando per $\det(A)^n$ da entrambi i lati si ottiene la tesi $\square$

$\boxed{\text{COR}}$ [Applicazione ai sistemi lineari: LA REGOLA DI CRAMER]

$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ A\in M_n(K) \\ \exists A^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists!\, s \text{ soluzione ed esplicitamente:}$$

$$\boxed{s_i = \frac{1}{\det(A)}\cdot \det\left(A\left(A^{(i)}\mapsto b\right)\right)}$$

Dim.: Se A è invertibile allora ha rango massimo quindi il rango della matrice completa non può essere maggiore. Allora per ROUCHÉ-CAPELLI LA SOLUZIONE ESISTE ED È UNICA ed è:

$$s_i = (A^{-1}\cdot b)_i = \frac{1}{\det(A)}\cdot\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\det(A_{ki})\cdot b_k = \frac{1}{\det(A)}\det\left(A\left(A^{(i)}\mapsto b\right)\right)$$

$\square$

Esempio:

$$\begin{cases} x + 0 + 2z = 1 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + 0 + 7z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Matrice Associata}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} =: A$$

2 GHIOTTI ZERI SULLA SECONDA COLONNA! CI CONVIENE ALLORA APPLICARE LAPLACE SULLA SECONDA COLONNA

Def 1 con $j=2$

Parto da questo sistema: lo vogliamo risolvere con IL METODO DI CRAMER

Calcoliamo prima $\det(A)$

$$\Rightarrow \det(A) =$$

$$= \underbrace{0}_{a_{12}} \cdot \underbrace{(-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}_{cof(A)_{12}} + \underbrace{3}_{a_{22}} \cdot \underbrace{(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}_{cof(A)_{22}} + \underbrace{0}_{a_{32}} \cdot \underbrace{(-1)^5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{cof(A)_{32}}$$

$$= 3(1 \cdot 7 - 2 \cdot 1) = 15 \Rightarrow \det(A) = 15$$

Sappiamo che esiste ed è unica la soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$: $As = b$.

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\left(b \; A^{(2)} \; A^{(3)}\right)\right) = \frac{1}{15} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{15}{15} = 1 \\ s_2 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\left(A^{(1)} \; b \; A^{(3)}\right)\right) = \frac{1}{15} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot 5 = \frac{1}{3} \\ s_3 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\left(A^{(1)} \; A^{(2)} \; b\right)\right) = \frac{1}{15} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è l'unica soluzione del sistema

Se abbiamo più variabili che equazioni linearmente indip., possiamo sempre prima INSERIRE IL NUMERO DI PARAMETRI CHE CI SERVE, e poi APPLICARE CRAMER.

Esempio:

$$\begin{cases} x+y-5z=6 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. ABBIAMO **3** VARIABILI E **2** EQUAZIONI LINEARM. INDIP. $\Rightarrow$ CI SERVONO **3−2=1** PARAMETRI DA INSERIRE (NON IMPORTA SU QUALE VARIABILE!)

$z := t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y = 5t+6 \\ 3x-y = -t+2 \end{cases}$$

$\in \mathbb{R}$!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5t+6 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1\cdot(-1) - 1\cdot 3 = -1-3 = -4 \neq 0$$

Troviamo l'unica soluzione per t fissato:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{-4}\cdot\det\begin{pmatrix} 6+5t & 1 \\ 2-t & -1 \end{pmatrix} = 2+t \\ s_2 = \frac{1}{-4}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 6+5t \\ 3 & 2-t \end{pmatrix} = 4(1+t) \end{cases}$$

Mettendo tutto insieme:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 4(1+t) \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \dim(S) = 1$$