Coordinate Cartesiane & Coordinate Parametriche

Esempio: $\{ x+2y=5$ SISTEMA LINEARE.

Abbiamo una equazione (lin. indip. perché non nulla) e due variabili. Allora impongo $2-1=1$ parametro. Sia $y=t\in\mathbb{R}$. Allora $x=5-2t$. Risolviamo anche il sistema omogeneo $x+2y=0$.

$$A:=\left\{\begin{pmatrix}5-2t\\t\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$V:=\left\{\begin{pmatrix}-2t\\t\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Tra tutte le soluzioni possibili in A, scegliamo quella per $t=2$. [ma potevamo scegliere qualsiasi t!]. Allora $\tilde{s}=\begin{pmatrix}5-2t\\t\end{pmatrix}\Big|_{t=2}$

$$\Rightarrow \tilde{s}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow A=V+\tilde{s}=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Allora ogni soluzione si può scrivere come:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$A: \begin{cases} x_1 = 1 - 2 \cdot t \\ x_2 = 2 + 1 \cdot t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE del SISTEMA!

Def: Sia S un sottospazio affine di $A^m(K)$ passante per $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$ e parallelo a $W \subseteq K^m =: V$. Sia W generato da vettori $w^1, \dots, w^n$

$\Rightarrow A^m(K) \ni P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ appartiene anche al sottospazio S se e solo se

$P - Q \in W$, i.e. se e solo se $P - Q = t_1 w^1 + \dots + t_n w^n \quad \exists t_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_1^1 + \dots + t_n w_1^n \\ \vdots \\ x_m = q_m + t_1 w_m^1 + \dots + t_n w_m^n \end{cases}$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE

Oss: **ESTRAENDO UNA BASE** dai generatori di **W** è possibile ridurre la complessità delle equazioni parametriche.

Esempio:

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-5\\6\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad Q = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow S: \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 = -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 = 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} \longrightarrow S: \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 \\ x_2 = -t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 + 3t_1 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$\dim(W) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -5\\ 3 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2 \leftarrow \text{E NON 3!}$$

$$\dim(W) = \dim(S)$$

ALLORA IL SOTTOSPAZIO AFFINE S È UN **PIANO AFFINE** → $\dim(S)$

Allora l'estrazione della base da **W** ci dice che possiamo scegliere **OGNI DUE VETTORI GENERATORI INVECE CHE TUTTI E TRE.** Quindi in particolare possiamo buttare via il terzo senza cambiare lo spazio **S**.

§. Da Cartesiane a parametriche

$M_{n\times m}(K)$
$\Downarrow$
$A \cdot x = b$
SISTEMA LINEARE
(espresso in EQUAZ. CARTESIANE)

$S := \{s \mid As = b\} \ni \tilde{s}$
SPAZIO AFFINE DELLE SOLUZIONI

SCELTA DI UNA SOLUZ. PARTICOLARE $\Rightarrow S = W + \tilde{s}$

$W := \{w \mid Aw = 0\} \rightsquigarrow S:$
SPAZIO VETTORIALE CHE È GIACITURA DI S

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{s}_1 + \sum_{i=1}^{N} t_i w_1^i \\ \vdots \\ x_m = \tilde{s}_m + \sum_{i=1}^{N} t_i w_m^i \end{cases}$$

TROVO GENERATORI per W $w^1, \dots, w^N$ CHE POSSIBILMENTE SIANO UNA BASE DI W

EQUAZIONI PARAMETRICHE di S

§. Da parametriche a Cartesiane

$$S: \begin{cases} x_1 = \tilde{s}_1 + \sum_{i=1}^{N} t_i w_1^i \\ \vdots \\ x_m = \tilde{s}_m + \sum_{i=1}^{N} t_i w_m^i \end{cases}$$ al variare dei parametri $t_i \in K$

$\Rightarrow S \subseteq A^m(K)$ PARALLELO a $W := \mathrm{Span}(w^1, \ldots, w^N)$ E PASSANTE PER $\tilde{s}$

in altre parole $S = W + \tilde{s}$

$\Downarrow$

CALCOLIAMO $\dim(W) =: r$

[PER ESEMPIO CON L'ESTRAZ. DELLA BASE, O COL RANGO]

FORMA MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} w_1^1 & \cdots & w_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ w_m^1 & \cdots & w_m^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ x_m - \tilde{s}_m \end{pmatrix}$$

COMPATIBILE SE E SOLO SE $x \in S$

ALTRIMENTI PER ROUCHÉ-CAPELLI IL SISTEMA NON AVREBBE SOLUZIONI

RIDUZIONE IN FORMA SCALA TRAMITE GAUß

$$(\tilde{A} \mid \tilde{b})$$

Siccome $\dim(S) = \dim(W) = r$ che abbiamo già calcolato, per ROUCHÉ-CAPELLI dobbiamo avere che:

$$\mathrm{rank}(\tilde{A} \mid \tilde{b}) = \mathrm{rank}(\tilde{A}) = \dim(W) = r$$

Ne segue che le ULTIME $m-r$ COORDINATE di $\tilde{b}$ DEVONO ESSERE NULLE!

$$S: \begin{cases} \tilde{b}_{r+1} = 0 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m = 0 \end{cases}$$

ECCO LE NOSTRE EQ.ni CARTESIANE

DIPENDONO DALLE x_i!!

Esempio:

$$S:\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 = -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 = 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} \Rightarrow W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-5\\6\\1\end{pmatrix}\right)$$

FORMA MATRICIALE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & x_1-1 \\ -1 & 1 & -5 & x_2 \\ 3 & 0 & 6 & x_3-1 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right)$$

PERCHÉ IL RANGO È LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO GENERATO DALLE COLONNE, OVVERO $\dim(W)$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \dim(W) = \dim(S) = 2$$

RIDUZIONE IN FORMA SCALA TRAMITE **GAUß**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & x_1-1 \\ 0 & -1 & 3 & x_1+x_2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1+6x_2+x_3-4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1+5x_2+x_4-3 \end{array}\right)$$

L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE QUESTE DUE ENTRATE FACCIANO ZERO

DEVE CORRISPONDERE AD UN SISTEMA **COMPATIBILE**, CIOÈ

$$\text{rank}(\tilde{A}\,|\,\tilde{b}) = \text{rank}(\tilde{A}) = 2$$

$$S:\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Ecco le coordinate Cartesiane

Esercizio: passare da queste alle coordinate parametriche e ritrovarne di equivalenti a quelle iniziali.