Lezione 17 - 27/10/2025

funzioni trigonometriche

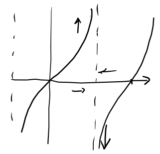
- $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$
- $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0$$

- $x = \frac{\pi}{2}$

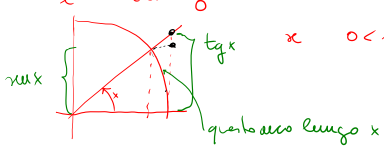
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

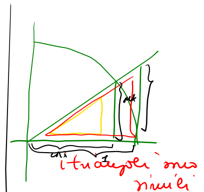


2) limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

è un caso $\frac{0}{0}$



se $0 < x < \frac{\pi}{2}$



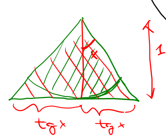
$y : 1 = \sin x : \cos x$

$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$

si ha che

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin x < \underbrace{x < \operatorname{tg} x}_{} = \frac{\sin x}{\cos x}$

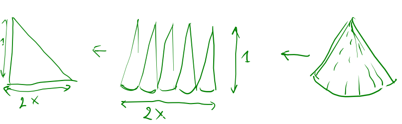
per convincersi



area verde $\leq$ area rossa

area rossa $= \operatorname{tg} x$

area verde $= x$



quindi se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ allora $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

quindi se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

sono 3 funzioni pari $f(x) = f(-x)$

quindi $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ vale

$$\underset{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 1}}{\cos x} < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} < \underset{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 1}}{1}$$

per i 2 carabinieri

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ caso $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}}}{\frac{1}{1+\cos x}} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Limite delle restrizioni $\quad f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

e $\quad F \subseteq E$

la funzione $\quad f_{|F} : F \to \mathbb{R}$, $\; x \mapsto f(x)$

la chiamo funzione ristretta al dominio F, o restrizione della f di partenza

Teor. sia $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ pto di acc. per E

sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$

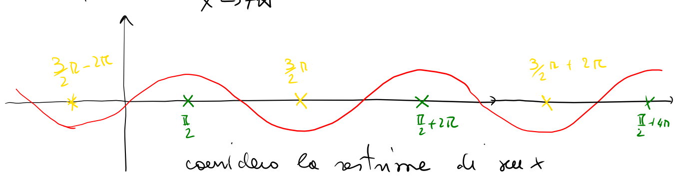
sia $F \subseteq E$, con x_0 pto di acc. per F

Allora se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

anche $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f_{|F}(x)$ esiste e vale L

oss. per provare che una funzione non ha limite basta trovare 2 restrizioni con limiti diversi

esempio $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$



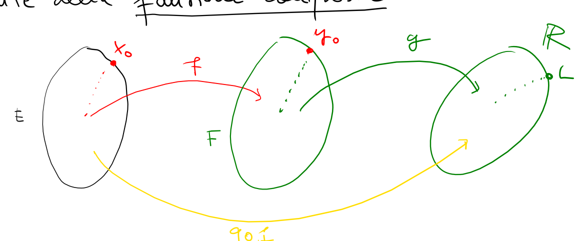
considero la restrizione di $\operatorname{sen} x$ ai punti $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} = F_1$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}_{|F_1}(x) = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{=\,1} = 1$$

$\left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\} = F_2$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}_{|F_2}(x) = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)}_{=\,-1} = -1$$

Limite della funzione composta



supponiamo che $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, x_0 di acc. per E

supponiamo $g: F \to \mathbb{R}$, $y_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, y_0 di acc. per F

supponiamo $f(E) \subseteq F$

supponiamo che $L \in \tilde{\mathbb{R}}$

sia $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\displaystyle\lim_{y \to y_0} g(y) = L$

¿ cosa possiamo dire di $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(f(x))$?

¡ speriamo che vada a L !

supponiamo che $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per E

supponiamo $g: F \longrightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, y_0 di acc. per F

supponiamo $f(E) \subseteq F$

supponiamo che $L \in \tilde{\mathbb{R}}$

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = L$

¿ cosa possiamo dire di $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$?

¡ Speriamo che vada a L !

$\lim_{y \to y_0} g(y) = L \overset{def}{\iff} \forall W$ di L, $\exists V$ di y_0: $\forall y \in F$

$y \in V \setminus \{y_0\} \Rightarrow g(y) \in W$

$\forall W \longrightarrow \boxed{\exists \lim g} \longrightarrow \exists V$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \overset{def}{\iff} \forall V$ di y_0, $\exists U$ di x_0 : $\forall x \in E$

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\forall V \longrightarrow \boxed{\exists \lim f(x)} \longrightarrow \exists U$

le metto in fila

$\forall W, \exists V$ ma $\forall V, \exists U$

$\forall W$ di L, $\exists U$ di x_0: $\forall x \in E$,

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V \overset{?}{\Longrightarrow} g(f(x)) \in W$

c'è un problema perché solo x $f(x) \in V \setminus \{x_0\}$ le cose funzionano,

quindi in generale non vale,

ma se aggiungo delle condizioni, sì

una di queste 2,

1) $\forall x \in E$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \neq y_0$

oppure

2) $y_0 \in F$, e $g(y_0) = L$

Teorema se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $\lim_{y \to y_0} g(y) = L$

e valgono 1) o 2)

allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$

(prendiamo per buono il risultato) (solo l'idea della dimostrazione sopra)

Applicazioni

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}$

penso a questa funzione come alla composizione

$x \longmapsto x^2+1$

$\shortparallel$

$y \longmapsto \sqrt{y}$

le ipotesi 1) o 2) sono sempre verificate.

$\lim_{x \to +\infty} x^2+1 = +\infty$, $\lim_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$

il limite della composta è il secondo

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(\sqrt{x^2+1} - x)$

l'argomento del seno è una forma indeterminata

$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ l'argomento del seno è una forma indeterminata

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x \qquad +\infty-\infty \quad$ f. ind.

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ $\quad \sqrt{x^2+1}+x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$

$x \longmapsto \sqrt{x^2+1}-x = y \longmapsto \sin y$

$x\to+\infty \rightarrow \sqrt{x^2+1}-x \to 0$

$y \to 0$

$\sin y \to 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$$

$x \to +\infty$, $\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \to 0$

so che $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \boxed{\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x}_{?}$

$\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} \to 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ $\quad f(x)\to 0$

$x \longmapsto f(x) = y \to 0$

$\frac{\sin(y)}{y} \to 1$

resta da calcolare

$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot x$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \frac{1}{2}}$$

Esempi

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}$ $\qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)\cdot\frac{1}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sin x}{x}\to 1, \quad \frac{1-\cos x}{x^2}\to \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\cos x}\to 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+4x}{x^5-x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2+3x+4)}{\cancel{x}(x^4-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x^2+3x+4}^{\to 4}}{\underbrace{x^4-1}_{\to -1}} = -4$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^4-x^2}{x-x^3}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4\left(6-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to +\infty}\underbrace{x}_{\to +\infty}\cdot\underbrace{\frac{\left(6-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{\to -6} = -\infty$$

$\frac{1}{x^2}\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi+4x)}{x} \qquad \frac{0}{0}$$

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}_{\to 1}\cdot 4 = -4$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} \to 1 \quad \text{se } f(x)\to 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1} = 0}$$

$\lim_{x\to +\infty}\underbrace{\sqrt{5+\cos x}}_{f(x)}$ non esiste

$f(x) = f(x+2\pi)$

$f(0) = \sqrt{6} = f(2\pi) = f(4\pi) = f(2k\pi)$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{5}$

$f(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = \sqrt{5}$

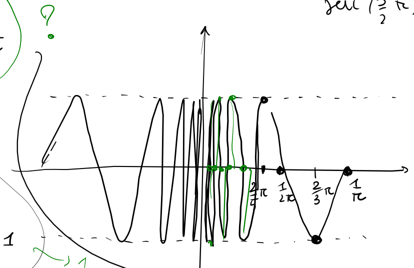
$\operatorname{sen}(\frac{5}{2}\pi) = 1$

$$\sqrt{5-1} \le \sqrt{5+\cos x} \le \sqrt{5+1}$$

$\sqrt{5-1} = 2 \qquad (-1\le\cos x\le +1) \qquad \sqrt{5+1}=\sqrt{6}$

$$\underbrace{\frac{2}{x^2+1}}_{\to 0} \le \frac{\sqrt{5+\cos x}}{x^2+1} \le \underbrace{\frac{\sqrt{6}}{x^2+1}}_{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\to 0}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad ?$$



questo limite non esiste

sui punti $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ vale 1 $\to 1$

sui punti $\frac{1}{k\pi}$ vale 0 $\to 0$

sui punti $\frac{1}{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}$ vale -1 $\to -1$

$$\lim_{x\to +\infty}\underbrace{x}_{\to +\infty}\cdot\underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{\to 0} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$= 1$

$x \longmapsto \frac{1}{x} = y$

$y \longmapsto \frac{\operatorname{sen} y}{y}$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\to 0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{x} = y$$

$$y \longmapsto \frac{\sin y}{y}$$

$$= 1$$

idea : cambio la variabile : $\frac{1}{x} = y$

$$x \to +\infty \iff y \to 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} \cdot \sin y$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)}{x}$$