

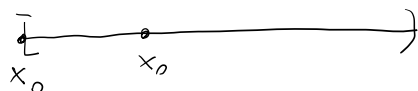
28 ottobre

Def Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo,

$x_0 \in I$. Se esiste ed è finito il seguente

limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{chiamiamo}$$

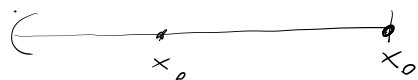


questo limite la derivata destra di f in x_0
e lo denotiamo con $f'_d(x_0)$

Se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

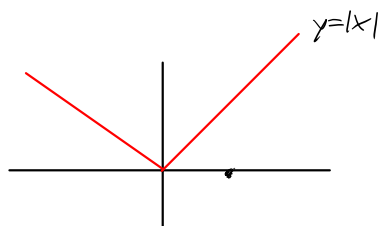
chiamiamo questo limite la derivata sinistra
di f in x_0 e lo denotiamo con $f'_s(x_0)$



Esempio $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Se $x > 0$

$$(|x|)' = (x)' = 1$$



Se $x < 0$

$$(|x|)' = (-x)' = -1$$

$$\begin{aligned} (|x|)'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 = (|x|)'_d(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|x|)'_s(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

Teor Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un punto interno di I .
Sono equivalenti le seguenti due proposizioni

1) $f'(x_0)$ esiste

2) $f'_d(x_0)$ e $f'_s(x_0)$ esistono e sono uguali.

Quando 1) e 2) sono vere si ha

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_s(x_0).$$

Esempio Non esiste $(|x|)'(0)$ poiché

$$(|x|)'_d(0) = 1 \neq -1 = (|x|)'_s(0)$$

Def (Punto critico di una funzione)

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall$ n punto $x_0 \in I$

si dice un punto critico di f se

esiste $f'(x_0)$ e se inoltre $f'(x_0) = 0$.

Teor (Fermat)

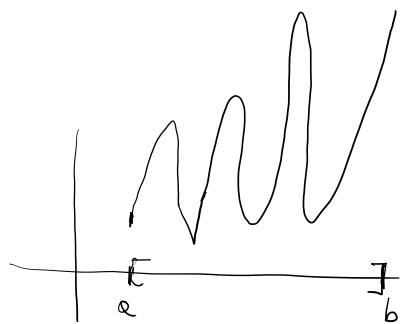
Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,

Sia x_0 un punto
interno di I e

supponiamo che $f'(x_0)$
esista e che x_0 è

un punto di massimo o

di minimo relativo. Allora $f'(x_0) = 0$.



Dim Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo
locale. Questo significa che $\exists \delta_0 > 0$

t.c. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I \text{ t.c. } |x - x_0| \leq \delta_0$.

Calcolo

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Notare che

per $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'_d(x_0) \leq 0$$



$$f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Per $x_0 - \delta_0 < x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

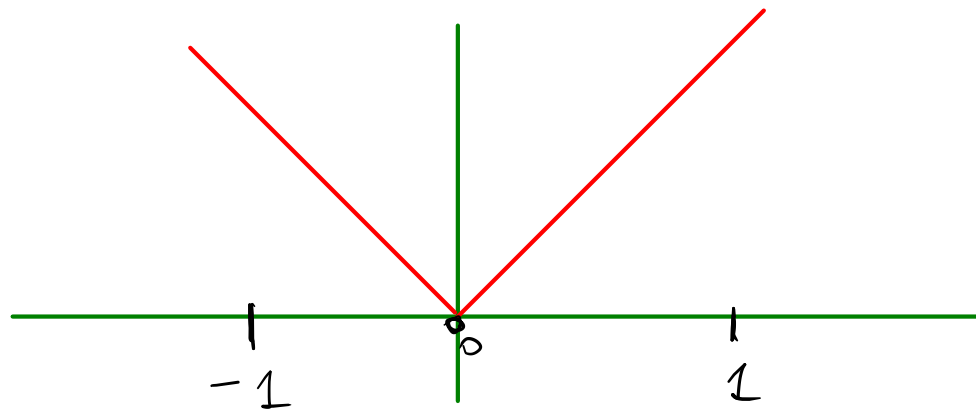
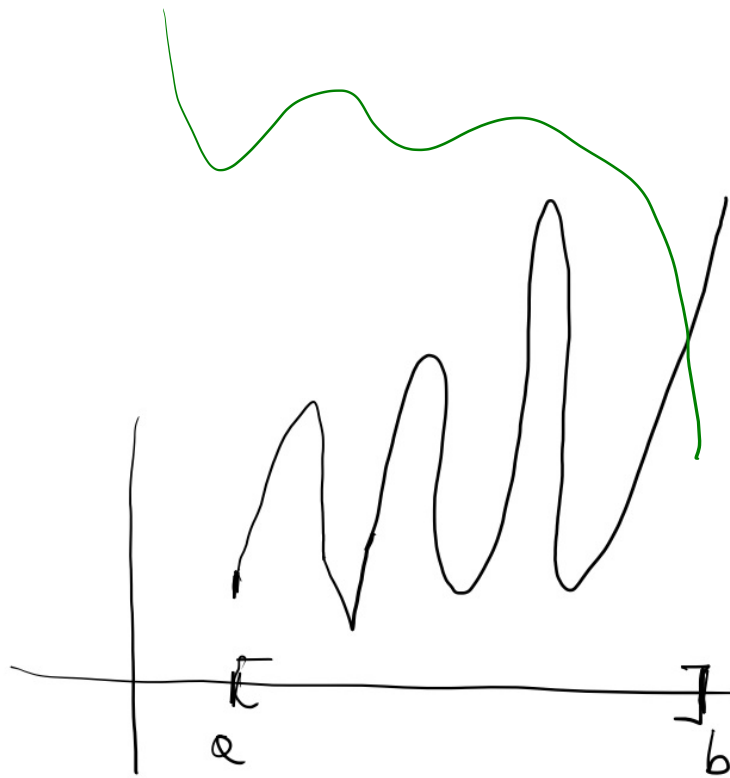
$$\Rightarrow f'_s(x_0) \geq 0$$

Riepilogando

$$f'_d(x_0) \leq 0 \leq f'_s(x_0)$$

If both do exist $f'(x_0) \Rightarrow f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$

$$\Rightarrow f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0) = 0$$



0 è il punto di minimo assoluto in $[-1, 1]$
per $|x|$.

$$(|x|)'_a(0) = 1 \geq 0$$

$$(|x|)'_b(0) = -1 \leq 0$$

Esempio Sia $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$
in $[0, 4]$ ($f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$)

Si come $f \in C^0([0, 4])$ so che esistono punti
di max/min assoluto.

Voglio restringere le candidature. Tra i
candidati sono i punti 0 e 4.

Dal teorema di Fermat gli eventuali punti
di max/min all'interno dell'intervallo
sono necessariamente punti critici.

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x \begin{matrix} \swarrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix} \text{ entrambi contenuti in } (0, 4)$$

Candidati sono 0, 2, 3, 4.

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$$

$$\begin{cases} \boxed{f(0) = 0} & 0 \text{ p.t. di min assoluto} \\ f(2) = 28 \\ f(3) = 27 \\ \boxed{f(4) = 32} & 4 \text{ p.t. di max assoluto.} \end{cases}$$

$$f'(x) = 6(x-2)(x-3)$$



Esempio Si ha $1+x \leq e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
e se $x \neq 0$ si ha $1+x < e^x$.

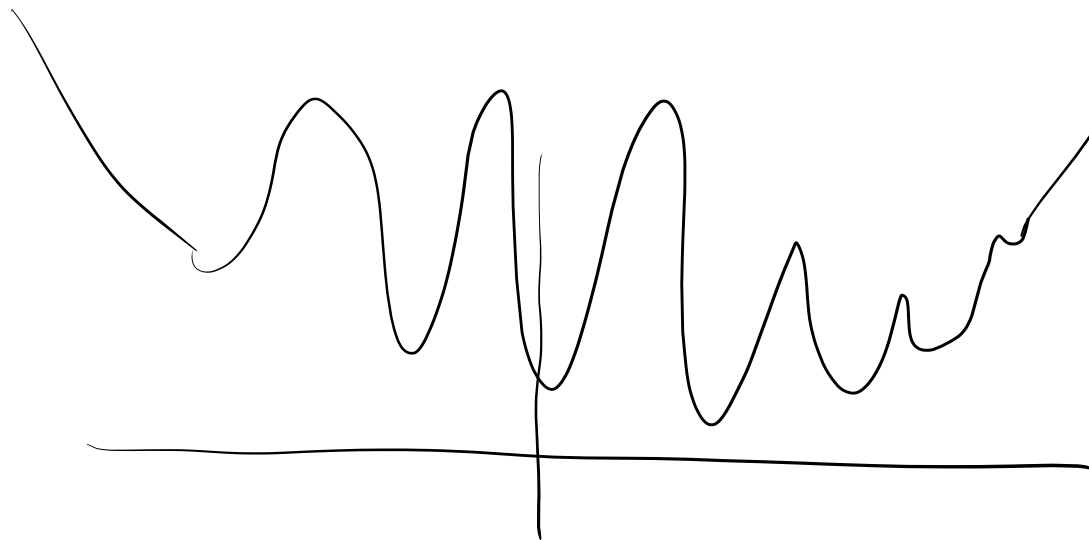
Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ t.c. esistono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_+ \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_- \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Supponiamo che $\exists x_0$ t.c. $f(x_0) < L_{\pm}$

Allora f ha punti di minimo assoluto in $\mathbb{R}$.



Esempio Si ha $(*)$ $1+x \leq e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
e se $x \neq 0$ si ha $1+x < e^x$. $(**)$

Introduco $f(x) = e^x - x - 1$

$$(*) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$(**) \Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 1

$f \in C^0(\mathbb{R})$, ha punti di minimo assoluto.

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = \ln 1 = 0$$

C' è un unico punto ~~minimo~~ ^{critico} $x=0 \Rightarrow$

$x=0$ è l'unico punto di minimo assoluto.

$$f(x) > f(0) = \quad \forall x \neq 0$$

$$= e^0 - 0 - 1 = 0$$

$$\forall x \neq 0 \quad e^x - x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > x + 1$$

Lemma (Teor. di Rolle)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e derivabile in (a,b)
con $f(a) = f(b)$. Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c.

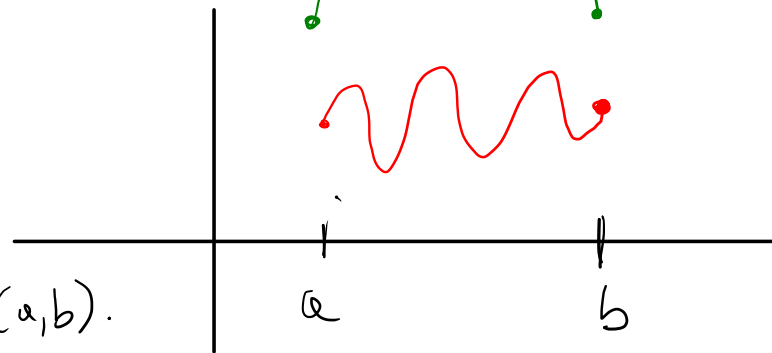
$$f'(c) = 0.$$



Dim

Se $f(x) \equiv k$

allora $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$.



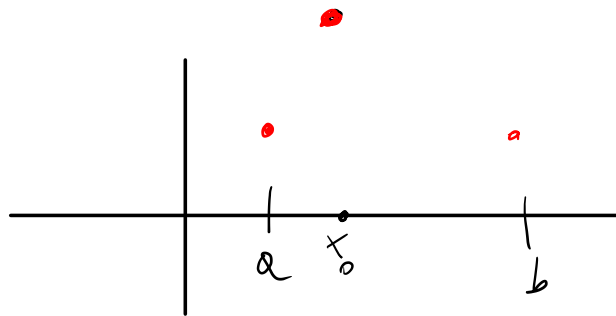
Supponiamo che f non sia costante. In questo caso

$\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$.

Per fissare le idee supponiamo $f(x_0) > f(a) = f(b)$

Da Weierstrass so

che esiste x_M punto
di massimo assoluto
di f .



Poiché $f(x_M) \geq f(x_0) > f(a) = f(b) \Rightarrow x_M \neq a \text{ e } b$

$\Rightarrow x_M \in (a,b) \xrightarrow{\text{Fermat}} f'(x_M) = 0$. Perciò $c = x_M$
andru' bene $\square$