Lezione 18 - 28/10/2025

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x}$$

$x \to 0$ $\quad \sqrt{x^2+1}-1 \to 0$ $\quad$ è $\frac{0}{0}$

Vogliamo sfruttare il limite fond.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{se } f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}\right]}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right]}_{\to 0} = 0$$

resta da valutare $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

$$\sqrt{A}-B = \frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^{\cancel{2}}}^{\to 0}}{\cancel{x}\,\underbrace{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}_{\to 2}} = 0$$

Limiti di successioni

- def. (successione a valori nell'insieme A)

diciamo successione a valori in A una funzione con dominio $\mathbb{N}$ e codominio A

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow A$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n$$

la indico con $(a_n)_n$

def. (sotto-successione)

sia $(a_n)_n$ una successione (a valori in A)

considero $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\quad g(k) = n_k$

che sia strettamente crescente

$(k_1 > k_2 \Rightarrow n_{k_1} > n_{k_2})$

la composta $\quad k \longmapsto n_k \longmapsto a_{n_k}$

$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow A$

la chiamo sottosuccessione della successione $(a_n)_n$

e la indico con $(a_{n_k})_k$

osservazione

ho $\quad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots$

"tiro fuori" alcuni termini

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots$

$a_1 = a_{n_0} \qquad a_4 = a_{n_1} \qquad a_7 = a_{n_2}$

$n_0 = 1$
$n_1 = 4$
$n_2 = 7$

$k \longmapsto n_k$ strett. crescente

rinumero $\quad a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\ldots$

~O~

Sia $(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$, Sia $(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$, sia $L \in \tilde{\mathbb{R}}$

Voglio dare un senso alla scrittura

oss. per i limiti di successioni valgono
- unicità
- permanenza del segno
- confronto

$\mathbb{N} \ni n \longmapsto a_n \in \mathbb{R}$

il dominio è $\mathbb{N}$.

quali sono i pti di acc. per $\mathbb{N}$?

è $+\infty$.

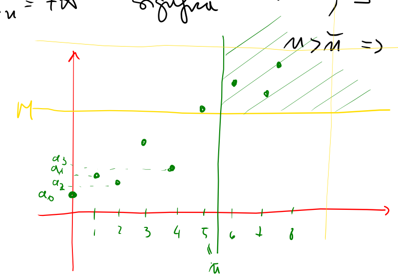
$\lim_n$ sarà $\lim_{x \to +\infty}$

$\lim_n a_n = L$ significa

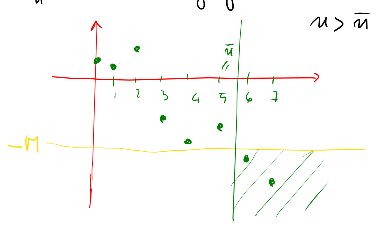
$$\boxed{\forall V \text{ di } L,\ \exists U \text{ di } +\infty : \forall x \in \mathbb{N} \quad x \in U \Rightarrow f(x) \in V}$$

quindi

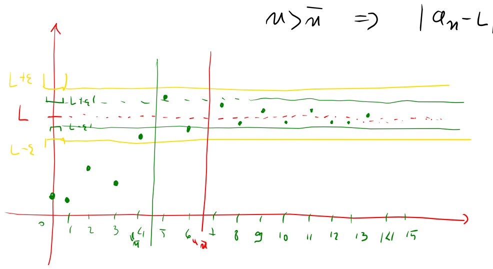
$\lim_n a_n = +\infty$ significa $\forall M > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n,$
$n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M$



$\lim_n a_n = -\infty$ significa $\forall M > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n$
$n > \bar{n} \Rightarrow a_n < -M$



$\lim_n a_n = L \in \mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \forall n,$
$n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$



se $\lim_n a_n = +\infty$ oppure $\lim_n a_n = -\infty$ $\quad (a_n)_n$ si dice <u>divergente</u>.

se $\lim_n a_n = L \in \mathbb{R}$ $\quad (a_n)_n$ si dice <u>convergente</u>.

oss. per i limiti di successioni valgono
- unicità
- permanenza del segno
- confronto

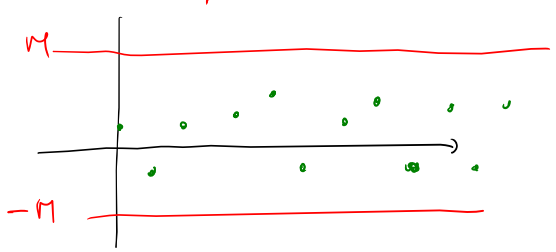
oss. per i limiti di successioni valgono

- unicità
- permanenza del segno
- confronto
- 2 carabinieri
- operazioni
- forme indeterminate

def. sia $(a_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$

$(a_n)_n$ si dice <u>limitata</u> se $\exists M>0$:

$\forall n, \quad |a_n| \le M$



es. $a_n = (-1)^n$

$1, -1, 1, -1, 1, -1$

vale anche il seguente teorema (simile al teorema sul limite delle funzioni ristrette)

Teo. sia $(a_n)_n$ una successione, sia $L \in \widetilde{\mathbb{R}}$

se $\lim_n a_n = L$

allora $\lim_k a_{n_k} = L$ per ogni <u>sottosuccessione</u> $(a_{n_k})_k$

oss. se $k \mapsto n_k$ strettamente crescente

di sicuro vale $n_k \ge k \quad \forall k$,

se $\lim_n a_n = L \in \mathbb{R}$

sarebbe $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n} : \forall n,$
$n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

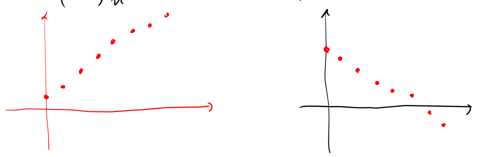
allora $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n} : \forall k$
$k > \bar{n} \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \varepsilon$ perché
$n_k \ge k > \bar{n}$

Limite delle successioni monotone

def. $(a_n)_n$ si dice monotona (← strett.) se

$(a_n)_n$ è crescente $\left(n_1 > n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2} \right)$ — $>$ strett. crescente

$(a_n)_n$ è decrescente $\left(n_1 > n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2} \right)$ — $<$ strett. decres.



Teo. sia $(a_n)_n$ una successione monotona

Allora esiste $\lim_n a_n$

e il limite vale $\begin{cases} \sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\} & \text{se cresc.} \\ \inf\{a_n, n\in\mathbb{N}\} & \text{se decres.} \end{cases}$

dim. supponiamo $(a_n)_n$ sia crescente e che

$\boxed{\sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\} = L \in \mathbb{R}}$

devo far vedere che $\lim_n a_n = L$

proprietà del sup.

1) $\forall n,\quad a_n \leq L$) ①

2) $\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n} : \quad a_{\bar{n}} > L-\varepsilon$) ②

uso la crescenza di $(a_n)_n$ ho $n > \bar{n} \Rightarrow a_n \geq a_{\bar{n}}$) ③

metto assieme

$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n>\bar{n} \Rightarrow L-\varepsilon \overset{②}{<} a_{\bar{n}} \overset{③}{\leq} a_n \overset{①}{\leq} L < L+\varepsilon$

cioè

$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n>\bar{n} \Rightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$

$\lim_n a_n = L$ C.V.D.

Applicazioni

1) sia $a>1$ — $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a \cdots a}_{n \text{ fattori}}$

voglio calcolare $\lim_n a^n$ — $a = 1{,}000000001$

$\boxed{a>1 \Rightarrow \lim_n a^n = +\infty}$ — $\lim_n n = +\infty$

$a>1 \Rightarrow a = 1+\delta$ con $\delta>0$

$(1+\delta)^n \geq 1+n\delta$ ← Bernoulli — $\lim_n 1+n\delta = +\infty$

applico il confronto e concludo

2) sia $a>1$ voglio calcolare

$\lim_n \frac{a^n}{n}$ ← $\frac{+\infty}{+\infty}$

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\boxed{a>1 \Rightarrow \lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty}$

$a = 1+\delta$ — $a^n = (1+\delta)^n \overset{\text{Newton}}{=} 1 + \binom{n}{1}\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \dots + \binom{n}{n}\delta^n$

$(n \geq 2)$

$\geq 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2$

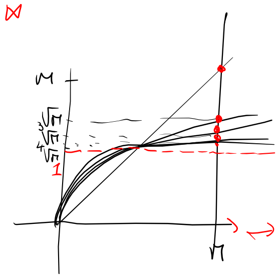
$a = 1+\delta$ $\qquad a^n = (1+\delta)^n = 1 + \binom{n}{1}\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \dots + \binom{n}{n}\delta^n$

$(n \geq 2)$ $\qquad$ Newton

$$\geq 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2$$

$$\frac{a^n}{n} \geq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\downarrow \atop \delta}{\delta} + \underset{\downarrow \atop +\infty}{\frac{(n-1)}{2}\delta^2}$$

$\Rightarrow \lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty$ // OK



3) fisso $M > 1$ (M grande)

vogliamo provare $\lim_n \sqrt[n]{M} = 1$

ricordando che

$\varepsilon > 0$ $\quad \lim_n (1+\varepsilon)^n = +\infty$

in particolare $\exists \bar{n} : \forall n,$

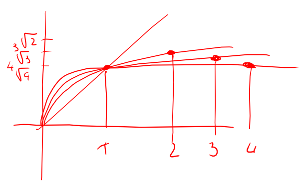
$n > \bar{n} \Rightarrow (1+\varepsilon)^n > M$

$$\Downarrow$$

$$1+\varepsilon > \sqrt[n]{M} \geq 1 > 1-\varepsilon$$

riassunto

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow 1-\varepsilon < \sqrt[n]{M} < 1+\varepsilon}_{\lim_n \sqrt[n]{M} = 1}$$



4) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$

ricordando che se $\varepsilon > 0$

$$\lim_n \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = +\infty$$

quindi $\exists \bar{n} : \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow \frac{(1+\varepsilon)^n}{n} > 1$

$$\Downarrow$$

$$(1+\varepsilon)^n > n$$

$$\Downarrow$$

$$1+\varepsilon > \sqrt[n]{n} > 1 > 1-\varepsilon$$

riassunto

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} ; \forall n, \quad n > \bar{n} \Rightarrow 1-\varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon}_{\lim_n \sqrt[n]{n} = 1}$$

$a > 1$ $\quad \lim_n a^n = +\infty, \quad \lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty, \quad \lim_n \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$

5) (limite fondamentale $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\leftarrow$ qual è il problema?

se la base (quello che elevo alla n) fosse $\geq 1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$

$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ← qual è il problema?

se la base (quello che elevo alla n) fosse $\geq 1+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$ il limite sarebbe $+\infty$

$\binom{n}{1} =$

se la base fosse $=1$ il limite ($1^n = 1$) sarebbe 1

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdots\frac{n-(n-1)}{n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1} + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1} + \frac{1}{4!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{3}{n}\right)}_{<1} + \dots + \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{<1}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{<1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$\leq 1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leq 2}$$

$2^{n-1} \leq n!$

$\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1 \text{ fatti}} \leq \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}_{n-1 \text{ fatti}}$

$1+a+a^2+\dots+a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$ $\quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$

concludere $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+2 = 3$

la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è <u>limitata</u>

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) + 0$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

concludere $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata, crescente $\Rightarrow$ è <u>convergente</u>

il valore del limite $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è un numero reale tra 2 e 3

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n} = s_n \qquad \lim_n s_n = +\infty$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{n^2} = \sigma_n \qquad \lim_n \sigma_n = L < +\infty$?

$= \frac{\pi^2}{6}$ problema di Basilea