

Successioni di Numeri Reali: una introduzione

Fabio Vlacchi

MIGe Università di Trieste

27 ottobre 2025

Definizione di Successione

Una **successione** è una funzione

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

che associa a ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $a_n \in \mathbb{R}$.

Viene spesso indicata come:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Esempi di Successioni

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $b_n = (-1)^n$
- $c_n = n^2 + 3n + 2$

Ognuna delle precedenti successione ha un comportamento differente al crescere di n .

Limite di una Successione

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $L \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Limite di una Successione

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $L \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $+\infty$ se:

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow a_n > M.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Limite di una Successione

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $L \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $+\infty$ se:

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow a_n > M.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha **limite** $-\infty$ se:

$$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > N \Rightarrow a_n < M.$$

In tal caso, scriviamo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

Convergenza e Divergenza

In alcuni casi, per brevità, si usa anche la notazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \iff a_n \rightarrow L$$

Convergenza e Divergenza

In alcuni casi, per brevità, si usa anche la notazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \iff a_n \rightarrow L$$

- **Convergente:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$
- **Divergente:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$
- **Indeterminata:** NON esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Esempi:

- $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim a_n = 0$
- $b_n = (-1)^n$: *indeterminata* (oscilla)
- $c_n = n^2 \Rightarrow \lim c_n = +\infty$
- $d_n = -n^2 \Rightarrow \lim d_n = -\infty$

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

- Una successione convergente è limitata.
- Somma/Prodotto di successioni convergenti è convergente.

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

- Una successione convergente è limitata.
- Somma/Prodotto di successioni convergenti è convergente.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n \rightarrow L_b$, allora:

$$a_n + b_n \rightarrow L_a + L_b, \quad a_n \cdot b_n \rightarrow L_a \cdot L_b$$

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

- Una successione convergente è limitata.
- Somma/Prodotto di successioni convergenti è convergente.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n \rightarrow L_b$, allora:

$$a_n + b_n \rightarrow L_a + L_b, \quad a_n \cdot b_n \rightarrow L_a \cdot L_b$$

Il precedente Teorema si estende anche al caso di successioni divergenti, escludendo le situazioni:

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

- Una successione convergente è limitata.
- Somma/Prodotto di successioni convergenti è convergente.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n \rightarrow L_b$, allora:

$$a_n + b_n \rightarrow L_a + L_b, \quad a_n \cdot b_n \rightarrow L_a \cdot L_b$$

Il precedente Teorema si estende anche al caso di successioni divergenti, escludendo le situazioni:

Per la somma: $L_a = +\infty$ e $L_b = -\infty$ oppure $L_a = -\infty$ e $L_b = +\infty$

Proprietà delle Successioni

- Unicità del limite.

Theorem

Se il limite di una successione esiste, esso è unico.

- Una successione convergente è limitata.
- Somma/Prodotto di successioni convergenti è convergente.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n \rightarrow L_b$, allora:

$$a_n + b_n \rightarrow L_a + L_b, \quad a_n \cdot b_n \rightarrow L_a \cdot L_b$$

Il precedente Teorema si estende anche al caso di successioni divergenti, escludendo le situazioni:

Per la somma: $L_a = +\infty$ e $L_b = -\infty$ oppure $L_a = -\infty$ e $L_b = +\infty$

Per il prodotto: $L_a = 0$ e $L_b = \pm\infty$ oppure $L_a = \pm\infty$ e $L_b = 0$.

- Il rapporto di successioni convergenti è convergente a meno che la successione al denominatore (che deve avere elementi non nulli) tenda a 0.

- Il rapporto di successioni convergenti è convergente a meno che la successione al denominatore (che deve avere elementi non nulli) tenda a 0.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n (\neq 0) \rightarrow L_b \neq 0$, allora:

$$a_n/b_n \rightarrow L_a/L_b.$$

- Il rapporto di successioni convergenti è convergente a meno che la successione al denominatore (che deve avere elementi non nulli) tenda a 0.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n (\neq 0) \rightarrow L_b \neq 0$, allora:

$$a_n/b_n \rightarrow L_a/L_b.$$

Il precedente Teorema si estende anche al caso di successioni divergenti, escludendo le situazioni:

- Il rapporto di successioni convergenti è convergente a meno che la successione al denominatore (che deve avere elementi non nulli) tenda a 0.

Theorem

Se $a_n \rightarrow L_a$ e $b_n (\neq 0) \rightarrow L_b \neq 0$, allora:

$$a_n/b_n \rightarrow L_a/L_b.$$

Il precedente Teorema si estende anche al caso di successioni divergenti, escludendo le situazioni:

$L_a = \pm\infty$ e $L_b = \pm\infty$ oppure $L_a = 0$ e $L_b = 0$ e convenendo che se $L_a \neq 0$ e $L_b = \pm\infty$ allora $L_a/L_b = 0$.

Theorem (della Permanenza del Segno)

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L > 0$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_0$ risulta $a_n > 0$

Theorem (della Permanenza del Segno)

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L > 0$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_0$ risulta $a_n > 0$

Corollary

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ e $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $L \geq 0$.

Theorem (della Permanenza del Segno)

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L > 0$, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_0$ risulta $a_n > 0$

Corollary

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ e $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $L \geq 0$.

Corollary

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L_a$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L_b$ e se $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $L_a \geq L_b$.

Theorem (del Confronto^a)

^aanche noto in Italia come “Teorema dei Carabinieri”

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tre successioni di numeri reali tali che

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L.$$

Theorem

Una successione monotóna è convergente oppure divergente, cioè non è indeterminata. Se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotóna crescente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}};$$

se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotóna decrescente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Theorem

Una successione monotóna è convergente oppure divergente, cioè non è indeterminata. Se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotóna crescente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}};$$

se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotóna decrescente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

In particolare, una successione monotóna e limitata è convergente.