Campi

Fino ad ora abbiamo definito spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e matrici a entrate reali. Se guardiamo bene, ciò che abbiamo usato dei numeri reali è il fatto che si possono sommare e moltiplicare tra di loro. In particolare non abbiamo mai usato il fatto che essi siano ordinati.

Questo ci fa pensare che sia possibile costruire tutta la teoria degli spazi vettoriali e delle matrici su insiemi su cui siano definite operazioni di somma e prodotto che godano di buone proprietà, che sono soddisfatte dai numeri reali.

__Def.__: sia K un insieme sul quale siano definite due operazioni, che chiamiamo somma e prodotto

$$+ : K \times K \longrightarrow K \qquad\qquad \cdot : K \times K \longrightarrow K$$
$$(a, b) \longmapsto a+b \qquad\qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

l'insieme K si dice un __campo__ se valgono le seguenti proprietà:

K1. (commutatività) $\forall a, b \in K$ vale
$$a+b = b+a \quad , \quad a \cdot b = b \cdot a$$

K2. (associatività) $\forall a, b, c \in K$ vale
$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad , \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

K3. (esistenza dell'elemento neutro)
esiste un elemento $0 \in K$ tale che $\forall a \in K$, $a+0 = 0+a = a$
esiste un elemento $1 \in K$ tale che $\forall a \in K$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
inoltre chiediamo che $0 \neq 1$.

K4. (esistenza di opposto e inverso)
$\forall a \in K$ esiste $b \in K$ tale che $a+b = b+a = 0$; si dimostra che tale elemento è unico, e lo si denota con $-a$, ed esso è detto l'__opposto__ di a
$\forall a \in K \setminus \{0\}$ esiste $b \in K$ tale che $a \cdot b = b \cdot a = 1$; si dimostra che tale elemento è unico, e lo si denota con a^{-1} oppure $1/a$; ed esso è detto l'__inverso__ di a.

K5. (distributività) $\forall a, b, c \in K$ vale
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Tutte le definizioni riguardanti gli spazi vettoriali si possono riscrivere sostituendo ai numeri reali un qualsiasi campo K. Si parla in questo caso di __spazio vettoriale su K__ oppure di __K-spazio vettoriale__.

__Esempio__: $\mathbb{R}$ è un campo, $\mathbb{Q}$ è un campo, $\mathbb{C}$ è un campo
$\mathbb{N}$ non è un campo, $\mathbb{Z}$ non è un campo.

__Esempio__: l'insieme delle funzioni razionali
$$\left\{ \frac{p}{q} \text{ dove } p \text{ e } q \text{ sono polinomi in una variabile e } q \neq 0 \right\}$$
con la somma e la moltiplicazione usuale tra quozienti di polinomi è un campo.

__Esempio__: l'insieme $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$, su cui definiamo somma e prodotto:
simboli, __non__ numeri

$$+ : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \qquad\qquad \cdot : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$
$$(a, b) \longmapsto a+b \qquad\qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

è un campo con 2 elementi.

Sistemi lineari

__Def.__: sia K un campo; un __sistema lineare__ di m equazioni in n incognite a coefficienti in K è un sistema di equazioni della forma:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{ij} \in K$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ e $b_i \in K$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$; $x_1, \dots, x_n$ sono dette __incognite__, mentre gli elementi $b_1, \dots, b_m$ sono detti __termini noti__ e gli elementi a_{ij} sono detti __coefficienti__ del sistema; una __soluzione__ del sistema è una n-upla ordinata di elementi di K, ovvero un elemento $s \in K^n$ (che scriviamo come un vettore colonna, ovvero $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$) tale che sostituendo s_i a x_i per ogni i nel sistema, tutte le uguaglianze che si ottengono sono vere;
il sistema si dice __omogeneo__ se $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$, ovvero se tutti i termini noti sono nulli; il sistema si dice __non-omogeneo__ se non è omogeneo, ovvero se esiste almeno un termine noto non nullo; il sistema si dice __compatibile__ se esiste almeno una soluzione, altrimenti si dice __incompatibile__.

__Oss.__: se un sistema lineare è omogeneo, allora la n-upla nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione; pertanto, tutti i sistemi lineari omogenei sono compatibili.

__Def.__: dato un sistema lineare come nella definizione precedente definiamo

$$A := (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}} \quad , \quad A \in M_{m,n}(K)$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad b \in M_{m,1}(K)$$

allora il sistema precedente si può scrivere:

$$\underbrace{\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1}}_{m \times 1} = \underbrace{b}_{m \times 1}$$

__Esempio__: consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2 \text{ equazioni} \\ 2 \text{ incognite} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

il sistema non è omogeneo; per esercizio, mostrare che esso è compatibile, ovvero che esiste $s \in K^2$, ovvero $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ tale che sostituendo s_i ad x_i otteniamo uguaglianze vere nel campo $K = \mathbb{R}$; infatti, su $K = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2 + 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 2x_2 \\ -2 + 2x_2 - 3x_2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2 + 2x_2 \\ -x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -14 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$ quindi il sistema è compatibile

__Esempio__: se $K = \mathbb{R}$ consideriamo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2 \text{ equazioni} \\ 2 \text{ variabili} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

questo sistema __non__ è compatibile: se lo fosse, esisterebbe $s \in \mathbb{R}^2$ $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{cases} s_1 + 2s_2 = 2 \\ s_1 + 2s_2 = 3 \end{cases} \implies 2 = 3 \quad \text{falso.}$$

__Oss.__: nell'esempio in cui il sistema è compatibile, abbiamo determinato una sua soluzione; essa, in tale specifico caso, è __unica__, e lo sappiamo perché nel determinarla abbiamo manipolato il sistema in modo da non cambiarne le sue soluzioni e siamo giunti alla fine a un sistema che ha esattamente una soluzione, dunque ciò vale anche per il sistema di partenza.

__Def.__: due sistemi lineari si dicono __equivalenti__ se ammettono le medesime soluzioni, ovvero se gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi sono tra loro uguali.

__Esempio__: consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

proviamo a risolverlo!

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 2(3 - 2x_2) + 4x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 6 - 4x_2 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 6 = 6 \end{cases}$$ ← sempre vera!

pertanto possiamo assegnare un qualsiasi valore a x_2 e calcolare il corrispondente valore di x_1 in modo da ottenere una soluzione, ovvero, l'insieme di tutte le soluzioni è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

__Notazione__: d'ora in poi identificheremo i seguenti due spazi vettoriali:

$$M_{m,1}(K) \quad \text{e} \quad K^m$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

__Teorema__: (Teorema di Cramer)
consideriamo un sistema lineare $AX = b$, e supponiamo che A sia una matrice quadrata ($A \in M_n(K)$); supponiamo che A sia invertibile; allora esiste un'unica soluzione del sistema lineare precedente ed essa è $A^{-1} \cdot b$.

__Oss.__: il risultato precedente __non__ dipende da b, dunque è vero qualsiasi sia il vettore dei termini noti.

__Oss.__: il teorema di Cramer ci dice che ogni sistema lineare, di n equazioni ed n variabili in cui la matrice dei coefficienti è invertibile, è compatibile.

Dim.: per dimostrare il teorema dimostriamo due cose:
1. che $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema
2. che $A^{-1} \cdot b$ è l'unica soluzione del sistema, ovvero che se s è una soluzione del sistema allora deve essere necessariamente $s = A^{-1} \cdot b$.

1. per dimostrare che $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema sostituiamo X con $A^{-1} \cdot b$ e verifichiamo che l'uguaglianza ottenuta sia vera.

$$A \cdot (A^{-1} \cdot b) \overset{?}{=} b$$

ci chiediamo se questa uguaglianza sia vera

$$A \cdot (A^{-1} \cdot b) \underset{\text{associatività}}{=} (A \cdot A^{-1}) \cdot b = \mathbb{1}_n \cdot b = b$$

abbiamo verificato che l'uguaglianza è vera, quindi $A^{-1} \cdot b$ è soluzione del sistema, dunque il sistema è compatibile.