<u>Teorema</u>: (Teorema di Cramer)

consideriamo un sistema lineare $AX = b$, e supponiamo che A sia una matrice quadrata $(A \in M_n(K))$; supponiamo che A sia invertibile; allora esiste un'unica soluzione del sistema lineare precedente ed essa è $A^{-1} \cdot b$.

Dim: abbiamo già mostrato che $A^{-1} \cdot b$ è soluzione, mostriamo ora che essa è l'unica soluzione.

2. supponiamo che $s \in K^n$ sia una soluzione di $AX = b$ e mostriamo che deve essere $s = A^{-1} \cdot b$;
dal momento che s è soluzione vale che

$$A \cdot s = b$$

ora moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza per A^{-1} a sinistra

$$A^{-1} \cdot (A \cdot s) = A^{-1} \cdot b$$

usando l'associatività

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot s = A^{-1} \cdot b$$

$$\mathbb{1}_n \cdot s = A^{-1} \cdot b$$

$$s = A^{-1} \cdot b$$

<u>Teorema</u>: (teorema di struttura per sistemi lineari omogenei)

consideriamo un sistema lineare omogeneo con m equazioni ed n incognite, ovvero del tipo:

$$AX = 0 \leftarrow \text{matrice } m \times 1 \text{ nulla}$$

siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni del sistema e sia $\lambda \in K$; allora vale:

1. $s + s'$ è soluzione del sistema lineare
2. $\lambda \cdot s$ è soluzione del sistema lineare

pertanto, ricordando che il vettore nullo $0 \in K^n$ è sempre soluzione di $AX = 0$, possiamo dire che l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$, ovvero l'insieme

$$\{ r \in K^n : \; A \cdot r = 0 \}$$

è un sottospazio vettoriale di K^n.

<u>Oss</u>: vale che se $A \in M_{m,n}(K)$ e $\lambda \in K$ ed $s \in K^n$, allora

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s)$$

Dim: 1. supponiamo che $s, s' \in K^n$ siano soluzioni di $AX = 0$ e dimostriamo che $s + s'$ è soluzione di $AX = 0$, ovvero dimostriamo che $A(s + s') = 0$; per ipotesi, dato che s ed s' sono soluzioni, vale che

$$As = 0 \quad e \quad As' = 0$$

ora calcoliamo:

$$A \cdot (s + s') \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività}}}{=} A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$$

quindi $s + s'$ è soluzione

2. supponiamo che $s \in K^n$ sia soluzione di $AX = 0$ e che $\lambda \in K$; mostriamo che $\lambda \cdot s$ è soluzione di $AX = 0$, ovvero che $A \cdot (\lambda \cdot s) = 0$; per ipotesi, dato che s è soluzione, vale $A \cdot s = 0$; calcoliamo

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (A \cdot s) = \lambda \cdot 0 = 0$$

quindi $\lambda \cdot s$ è soluzione.

<u>Oss</u>: supponiamo ora di considerare un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove $A \in M_n(K)$ è invertibile; per il teorema di Cramer questo sistema ammette un'unica soluzione, e dato che $0 \in K^n$ è sempre soluzione di un sistema omogeneo, otteniamo che 0 è l'unica soluzione di tale sistema.

<u>Teorema</u>: (teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari)

consideriamo un sistema lineare

$$AX = b \quad \text{con} \quad A \in M_{m,n}(K) \quad b \in K^m$$

sia $\tilde{s}$ una sua soluzione; un elemento $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ (che in generale dipende da s) tale che

$$s = \tilde{s} + s_0$$

ed s_0 è soluzione di $AX = 0$ (quest'ultimo è detto il sistema lineare omogeneo associato ad $AX = b$)

Dim: abbiamo fissato una volta per tutte una soluzione $\tilde{s} \in K^n$ di $AX = b$; dobbiamo dimostrare che

$s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ $\iff$ $s \in K^n$ è tale che esiste $s_0 \in K^n$ che sia sia soluzione di $AX = 0$ e tale che $s = \tilde{s} + s_0$

"$\Rightarrow$" supponiamo che $s \in K^n$ sia soluzione di $AX = b$; dobbiamo mostrare che esiste $s_0 \in K^n$ soluzione di $AX = 0$ e tale che $s = \tilde{s} + s_0$; scegliamo $s_0 := s - \tilde{s}$; con questa scelta vale che $s = \tilde{s} + s_0^{*}$; rimane da dimostrare che s_0 è soluzione di $AX = 0$, ovvero che $A \cdot s_0 = 0$; calcoliamo:

$$A \cdot s_0 = A \cdot (s - \tilde{s}) = A \cdot s - A \cdot \tilde{s} = b - b = 0$$

(notiamo che vale $s = \tilde{s} + s_0$ perché partendo da $s_0 = s - \tilde{s}$ possiamo sommare $\tilde{s}$ a entrambi i membri ottenendo

$$s_0 + \tilde{s} = s - \tilde{s} + \tilde{s} = s \;)$$

"$\Leftarrow$" supponiamo che $s \in K^n$ sia tale che $s = \tilde{s} + s_0$, dove s_0 è una soluzione di $AX = 0$, ovvero $A \cdot s_0 = 0$; dobbiamo mostrare che s è soluzione di $AX = b$, ovvero dobbiamo mostrare che $A \cdot s = b$; calcoliamo:

$$A \cdot s = A \cdot (\tilde{s} + s_0) = A \cdot \tilde{s} + A \cdot s_0 = b + 0 = b$$