Il teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari ci dice che se $AX=b$ è un sistema compatibile ed $\tilde{s}$ è una sua soluzione fissata, allora l'insieme di tutte le soluzioni di $AX=b$ è

$$\{\tilde{s}+s_0 : s_0 \text{ è soluzione di } AX=0\}$$

Oss: le soluzioni di $AX=b$ formano un sottospazio vettoriale di K^n se e solo se $b=0$, ovvero se e solo se il sistema è omogeneo.

"$\Rightarrow$" se le soluzioni di $AX=b$ formano un sottospazio vettoriale di K^n, allora il vettore nullo è soluzione, quindi $A\cdot 0=b$ pertanto $b=0$.

"$\Leftarrow$" questo è il contenuto del teorema di struttura per sistemi lineari omogenei.

Esempio: consideriamo il sistema

$$x+2y-3z=2$$

con coefficienti in $\mathbb{Q}$; scriviamo il sistema nella forma $AX=b$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad b=(2)$$

notiamo che questo sistema è compatibile perché $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ è soluzione (lo sono anche $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$); fissiamo come soluzione particolare $\tilde{s}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; per calcolare tutte le soluzioni di $AX=b$ è sufficiente calcolare tutte le soluzioni di $AX=0$ e sommare $\tilde{s}$ a ciascuna di esse; abbiamo che

$$AX=0 \iff x+2y-3z=0$$

questo sistema è equivalente a

$$x=3z-2y$$

quindi tutte le soluzioni di quest'ultimo sistema sono ottenute assegnando un qualsiasi valore u a y e un qualsiasi valore v a z, e calcolando a questo punto il corrispondente valore di x; quindi le soluzioni di $AX=0$ sono:

$$\left\{\begin{pmatrix}3v-2u\\u\\v\end{pmatrix} : u,v\in\mathbb{Q}\right\}$$

notiamo che

$$\begin{pmatrix}3v-2u\\u\\v\end{pmatrix}=u\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

concludendo, l'insieme delle soluzioni di $AX=b$ è

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} : u,v\in\mathbb{Q}\right\}$$

Il nostro obiettivo ora è di trovare un algoritmo per calcolare tutte le soluzioni di un sistema lineare omogeneo o meno. Procederemo in due fasi:

1. impariamo a risolvere un tipo particolare di sistema lineare
2. dimostriamo che ogni sistema lineare è equivalente (cioè, ha le stesse soluzioni) ad un sistema del tipo particolare al punto 1.

Def: sia $A\in M_{m,n}(K)$ e sia $r\in\{0,\dots,m\}$ il numero di righe non tutte nulle di A; diciamo che A è una matrice a scala o a gradini se e solo se:

- $r=0$ (ovvero A è la matrice nulla), oppure
- se $r>0$, deve valere che $A_{(i)}\neq(0,\dots,0)$ $\forall i\in\{1,\dots,r\}$ (ovvero le eventuali righe nulle di A sono tutte "in basso") e inoltre, sia $\bar{J}$ la prima colonna non tutta nulla di A e definiamo

$$\forall i\in\{1,\dots,r\} \qquad j_i=\min\{j : a_{ij}\neq 0\}$$

(notiamo che i numeri j_i sono ben definiti dal momento che per ipotesi, quando $i\in\{1,\dots,r\}$, la riga $A_{(i)}$ non è tutta nulla e pertanto ha senso chiedersi quale sia l'indice di colonna minimo tale che la corrispondente entrata nella riga sia non nulla; notiamo che $j_i\geq\bar{J}$ per ogni $i\in\{1,\dots,r\}$)

allora deve valere che

$$j_1<j_2<j_3<\dots<j_r$$

gli elementi a_{ij_i} per $i\in\{1,\dots,r\}$ sono detti elementi di pivot della matrice a scala.

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad r=3 \quad \bar{J}=2 \quad j_1=2 \quad j_2=3 \quad j_3=4$$

dato che $j_1<j_2<j_3$, la matrice A è a scala

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad r=2 \quad \bar{J}=1 \quad j_1=1 \quad j_2=3$$

l'unica riga nulla è in basso e vale $j_1<j_2$, quindi la matrice A è a scala.

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad r=3 \quad \bar{J}=1 \quad j_1=1 \quad j_2=3 \quad j_3=3$$

$j_2=j_3$, quindi A non è a scala.

Cerchiamo di capire quando un sistema lineare $AX=b$ con A a scala abbia soluzione. Sicuramente se $AX=b$ ha soluzione e le righe $A_{(r+1)},\dots,A_{(m)}$ sono nulle allora per ogni soluzione $s\in K^n$ vale che, se guardiamo $A\cdot s$, notiamo che le entrate di posto $(r+1),\dots,m$ di $A\cdot s$ sono tutte nulle; quindi deve necessariamente essere che $b_{(r+1)}=0,\dots,b_m=0$. Ci chiediamo se valga il viceversa.

Esempio: consideriamo

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}-4\\5\\0\end{pmatrix}$$

il sistema lineare è

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+x_4=-4\\ x_3+4x_4=5\end{cases}$$

esso è equivalente a

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+x_4=-4\\ x_3=5-4x_4\end{cases}$$

posso assegnare un qualsiasi valore a x_4 e calcolare il corrispettivo valore di x_3 da questa equazione

prendiamo $x_4=1$, e otteniamo

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3\cdot 1+1=-4\\ x_3=5-4=1\\ x_4=1\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}2x_1-x_2=-8\\ x_3=1\\ x_4=1\end{cases}$$

nuovamente, possiamo assegnare a piacimento un valore a x_2 e calcolare il corrispettivo valore di x_1 dalla prima equazione; scegliamo $x_2=1$

$$\begin{cases}2x_1=1-8\\ x_2=1\\ x_3=1\\ x_4=1\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases}x_1=-7/2\\ x_2=1\\ x_3=1\\ x_4=1\end{cases}$$

abbiamo ottenuto una soluzione particolare del sistema.

Prop: sia $AX=b$ un sistema lineare dove $A\in M_{m,n}(K)$ è a scala e supponiamo che il numero di righe non nulle di A sia r; allora

$AX=b$ ammette soluzione (ovvero, è compatibile) $\iff b_{r+1}=b_{r+2}=\dots=b_m=0$

Dim: "$\Rightarrow$" supponiamo che $AX=b$ ammetta una soluzione $s\in K^n$; dato che le righe dalla $(r+1)$-esima alla m-esima di A sono tutte nulle, allora le seguenti uguaglianze sono soddisfatte:

$$\begin{cases}0\cdot s_1+0\cdot s_2+\dots+0\cdot s_n=b_{r+1}\\ \vdots\\ 0\cdot s_1+0\cdot s_2+\dots+0\cdot s_n=b_m\end{cases}$$

pertanto $b_{r+1}=0,\dots,b_m=0$.

"$\Leftarrow$" supponiamo che valga $b_{r+1}=\dots=b_m=0$ e dimostriamo che $AX=b$ ammette una soluzione; per farlo, andiamo a costruire una soluzione $s=\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_n\end{pmatrix}\in K^n$; per ipotesi, le righe dalla $(r+1)$ alla m di A sono tutte nulle e anche le entrate $b_{r+1},\dots,b_m$ sono tutte nulle, quindi le ultime equazioni del sistema $AX=b$ sono tutte del tipo $0=0$ e quindi sono sempre soddisfatte qualsiasi siano i valori $s_1,\dots,s_n$; l'ultima equazione non identicamente nulla del sistema è quella data dalla riga r-esima

$$A=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & * & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & * & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & a_{rj_r} & \dots & \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

ricordiamo che per definizione $j_r=\min\{j : a_{rj}\neq 0\}$ e quindi $a_{rj_r}\neq 0$; l'equazione r-esima è quindi

$$\underbrace{a_{rj_r}}_{\neq 0}\cdot x_{j_r}+a_{r,j_r+1}\cdot x_{j_r+1}+\dots+a_{rn}x_n=b_r$$

ora scegliamo dei valori $s_{j_r+1}, s_{j_r+2},\dots,s_n\in K$ a nostro piacimento e scegliamo s_{j_r} nel modo seguente

$$s_{j_r}=\frac{b_r-\left(a_{r,j_r+1}\cdot s_{j_r+1}+\dots+a_{rn}\cdot s_n\right)}{a_{rj_r}}$$

con questa scelta di $s_{j_r}, s_{j_r+1},\dots,s_n$, l'$r$-esima equazione è soddisfatta; consideriamo quindi l'$(r-1)$-esima equazione:

$$a_{(r-1)j_{r-1}}\cdot x_{j_{r-1}}+a_{r-1,j_{r-1}+1}\,x_{j_{r-1}+1}+\dots+a_{(r-1),n}\cdot x_n=b_{r-1}$$

per ipotesi, visto che A è a scala, vale $j_{r-1}<j_r$

$$\begin{array}{lll} a_{(r-1)j_{r-1}} \;\; * \;\dots\; * & & \leftarrow \text{riga } r-1\\ & a_{rj_r} \;\; * \;\dots\; * & \leftarrow \text{riga } r\end{array}$$

le entrate di s corrispondenti a queste colonne sono state già determinate nel risolvere l'equazione r-esima

scegliamo a piacimento le entrate di s corrispondenti a queste colonne

determiniamo l'entrata di s corrispondente a questa colonna utilizzando l'equazione $(r-1)$-esima

pertanto, fissando a piacimento i valori $s_{j_{r-1}+1},\dots,s_{j_r-1}\in K$ otteniamo

$$s_{j_{r-1}}=\frac{b_{r-1}\left(a_{r-1,j_{r-1}+1}\,s_{j_{r-1}+1}+\dots+a_{r-1,n}\cdot s_n\right)}{a_{r-1,j_{r-1}}}$$

con questa scelta di $s_{j_{r-1}},\dots,s_n$ otteniamo che le ultime due equazioni non identicamente nulle sono soddisfatte; a questo punto procediamo analogamente a ritroso fino a determinare tutte le entrate di $s\in K^n$ affinché tutte le equazioni siano soddisfatte.