Esempio:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \quad - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

cerchiamo le soluzioni $s \in \mathbb{R}^6$ di questo sistema; la sua matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

fissare arbitrariamente un valore

calcolare un valore usando un'equazioni

dall'ultima equazione non identicamente nulla, otteniamo
$$x_4 = 1 - 2x_5 - x_6$$
scegliamo quindi $s_5 = 1$ e $s_6 = 0$ e otteniamo
$$s_4 = 1 - 2 \cdot 1 - 0 = -1$$
dalla penultima equazione non nulla otteniamo
$$x_2 = -1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6$$
scegliamo quindi $s_3 = -1$ e otteniamo
$$s_2 = -1 - 3 + 2s_4 + s_5 - s_6 =$$
$$= -4 - 2 + 1 - 0 = -5$$
infine, la prima equazione richiede:
$$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6$$
allora
$$s_1 = 1 - 5 + 1 + 1 - 2 - 0 = -4$$
in questo modo abbiamo determinato una soluzione particolare $\tilde{s}$ del sistema:
$$\tilde{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per ottenere tutte le soluzioni del sistema, consideriamo il sistema lineare omogeneo associato; se assegniamo valori u e v a s_5 ed s_6 otteniamo
$$s_4 = -2u - v \quad \text{(nel caso omogeneo!)}$$
se ora assegniamo valore $w \in \mathbb{R}$ ad s_3, otteniamo
$$s_2 = 3w + 2(-2u - v) + u - v$$
$$= 3w - 4u - 2v + u - v$$
$$= -3u - 3v + 3w$$
infine
$$s_1 = (-3u - 3v + 3w) - w - (-2u - v) - 2u - v$$
$$= 2w - 3u - 3v$$
$$= -3u - 3v + 2w$$
in definitiva la generica soluzione del sistema lineare associato è
$$\begin{pmatrix} -3u - 3v + 2w \\ -3u - 3v + 3w \\ w \\ -2u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{dove } u, v, w \in \mathbb{R})$$
$$= u \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
in definitiva, la generica soluzione del sistema lineare iniziale è
$$\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
con $u, v, w \in \mathbb{R}$; notiamo che in questo caso la generica soluzione dipende da 3 parametri (u, v, w)

A questo punto sappiamo risolvere sistemi lineari con matrici dei coefficienti a scala. Questo è utile perché ora vedremo che possiamo ricondurre ogni sistema lineare a uno a scala. Ricordiamo che due sistemi lineari
$$AX = b \quad \text{e} \quad A'X = b' \quad \text{con} \quad A \in M_{m,n}(K),\ b \in K^m$$
$$A' \in M_{m',n}(K),\ b' \in K^{m'}$$
si dicono <u>equivalenti</u> se i loro due insiemi delle soluzioni:
$$\{s \in K^n : As = b\} \quad \text{e} \quad \{s' \in K^n : A' s' = b'\}$$
sono uguali.

<u>Esempio</u>: il sistema dato dalla matrice
$$A = (0 \;\; 1 \;\; 1) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$$
e dal vettore $b = (2)$ dà l'equazione
$$y + z = 2$$
e le sue soluzioni sono tutti gli elementi $s \in \mathbb{R}^3$ del tipo:
$$\begin{pmatrix} u \\ 2 - v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
con $u, v \in \mathbb{R}$: questo sistema è equivalente a
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Def.</u>: sia $AX = b$ un sistema lineare, allora la matrice ottenuta aggiungendo ad A la colonna data da b, ovvero la matrice $(A \mid b)$, è detta la <u>matrice completa</u> del sistema $AX = b$.

<u>Esempio</u>: se consideriamo
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{allora abbiamo}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (A \mid b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora tre operazioni, che chiamiamo <u>operazioni elementari</u>, che trasformano un sistema lineare in un sistema lineare equivalente.

OE1: Scambio due equazioni del sistema. Più precisamente, dati $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$, scambio di posto l'equazione i_1-esima con l'equazione i_2-esima; questo corrisponde a scambiare di posto le righe di indice i_1 e i_2 della matrice completa.

OE2: Moltiplico un'equazione per uno scalare non nullo. Più precisamente, dati $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in K \setminus \{0\}$, moltiplico l'equazione i-esima per λ; questo corrisponde a moltiplicare la riga di indice i della matrice completa per λ.

OE3: Sommo a un'equazione un multiplo di un'altra equazione. Più precisamente, dati $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$ e dato $\lambda \in K$, sommo alla i_1-esima equazione la i_2-esima equazione moltiplicata per λ; questo corrisponde a sommare alla riga di indice i_1 la riga di indice i_2 moltiplicata per λ.

<u>Prop.</u>: se applichiamo a un sistema $AX = b$ una delle tre operazioni elementari otteniamo un sistema equivalente a quello di partenza.

Se ora mostriamo che è sempre possibile trasformare un sistema lineare qualsiasi in uno con matrice dei coefficienti a scala applicando una sequenza delle tre operazioni elementari, allora sappiamo risolvere un sistema qualsiasi. La procedura che trasforma una matrice arbitraria in una a scala utilizzando le operazioni elementari è detta <u>algoritmo di gradinizzazione</u> di <u>Gauss</u>.

<u>Algoritmo Gradinizzazione</u> di Gauss.

<u>Input</u>: matrice completa $(A \mid b)$ di un sistema lineare

<u>Output</u>: matrice completa $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ di un sistema lineare equivalente a quello in input e tale che $\tilde{A}$ è a scala.

1. Determino $\bar{j}$, l'indice di colonna minimo per cui abbiamo una colonna non nulla di A, ovvero $\bar{j} := \min\{j \in \{1, \dots, n\} : A^{(j)} \neq 0\}$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
$$\bar{j}$$
2. Determinare un indice di riga $\bar{i}$ tale che $a_{\bar{i}\bar{j}} \neq 0$ (l'esistenza di un tale indice $\bar{i}$ è assicurata dalla scelta di $\bar{j}$)
3. Scambiare le righe 1 e $\bar{i}$; dopo questa operazione, l'elemento $a_{1\bar{j}}$ è non nullo:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1\bar{j}} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \qquad a_{1\bar{j}} \neq 0$$
4. Moltiplicare la prima riga per $\dfrac{1}{a_{1\bar{j}}}$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
5. Per ogni $i \in \{2, \dots, m\}$, sommare alla i-esima riga un opportuno multiplo della prima riga al fine di rendere nulla l'entrata $a_{i\bar{j}}$; più precisamente, sostituire la riga i-esima con
$$A_{(i)} - a_{i\bar{j}} \cdot A_{(1)}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
6. Ripetere il procedimento precedente sulla sottomatrice determinata dalle righe $\{2, \dots, m\}$ e dalle colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
ripetere la procedura su questa sottomatrice

Questo algoritmo termina in un tempo finito e restituisce una matrice che soddisfa le richieste della specificazione.

<u>Esempio</u>: consideriamo il sistema lineare dato dalla matrice completa:
$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
effettuiamo la gradinizzazione:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{OE1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{OE2\ (\cdot \frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$