Sistemi di generatori e indipendenza lineare

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale su K e $W_1, W_2 \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali di K, allora anche $W_1 \cap W_2$ è sottospazio vettoriale di K.

Oss: non è vero che se V è spazio vettoriale su K e $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, allora $U \cup W$ è sottospazio vettoriale (esercizio: mostrare che le proprietà 1. e 3. di sottospazio valgono per $U \cup W$ in generale)

considerando $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$ dati da:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x - y = 0 \right\}$$

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x - 2y = 0 \right\}$$

notiamo che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$; consideriamo

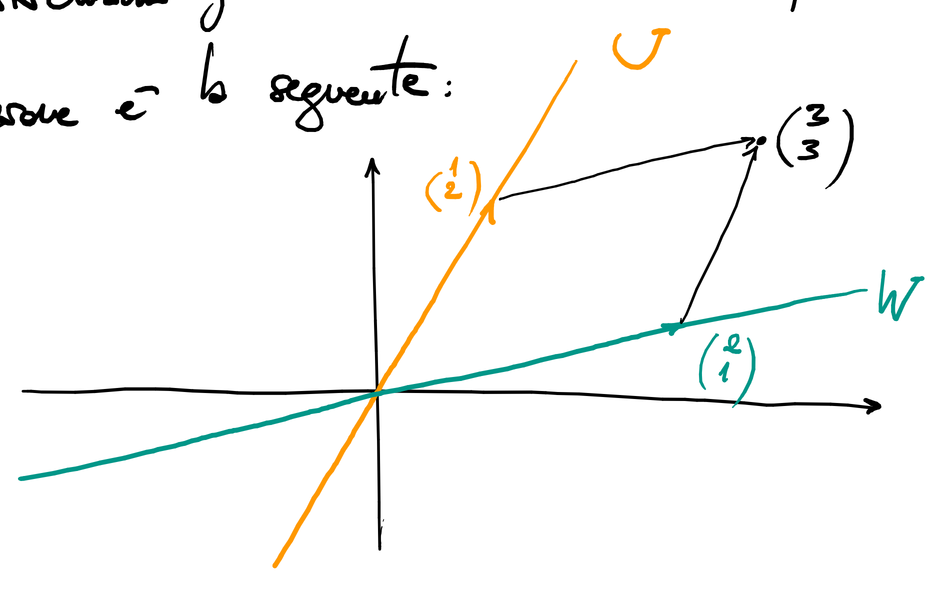
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_1 \in U \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 \in W$$

quindi $v_1, v_2 \in U \cup W$; però

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e vale che $v_1 + v_2 \notin U \cup W$ perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin U$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin W$ (perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ non soddisfa né l'equazione che definisce U né l'equazione che definisce W)

se identifichiamo gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con i punti del piano, la situazione è la seguente:



Def: sia V uno spazio vettoriale su K, siano U e W due sottospazi vettoriali di V; definiamo

$$U + W := \{ u + w : \quad u \in U \text{ e } w \in W \}$$

e chiamiamo questo sottoinsieme di V il <u>sottospazio vettoriale somma</u> di U e W.

Prop: con le notazioni precedenti, $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim: per esercizio.

Prop: con la notazione precedente, $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$

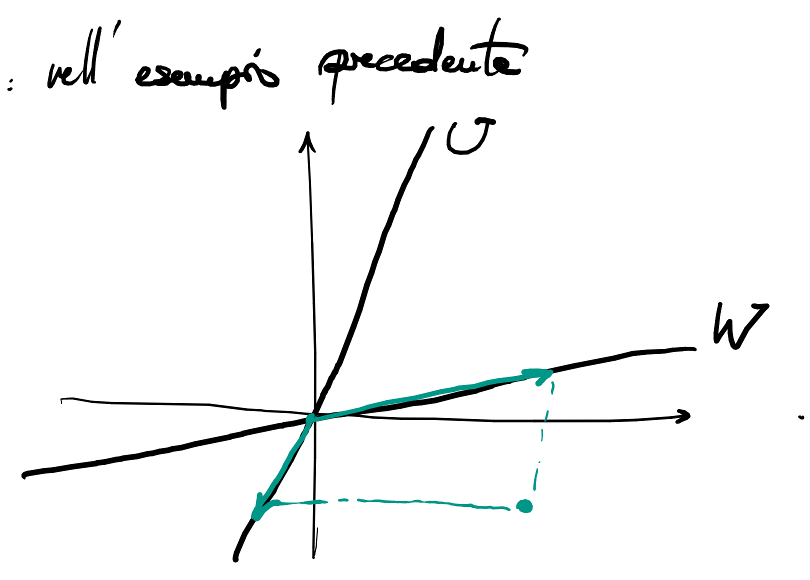
Dim: mostrare che $U \subseteq U + W$ significa mostrare che se $u \in U$, allora $u \in U + W$; mostrare che $u \in U + W$ significa mostrare che u può essere scritto come somma di un elemento di U e di un elemento di W; se quindi $u \in U$, ricordando che $0 \in W$, scriviamo

$$u = \underset{U}{\underset{\cap}{u}} + \underset{W}{\underset{\cap}{0}}$$

quindi $u \in U + W$; l'inclusione $W \subseteq U + W$ si dimostra in maniera analoga.

Cor: con la notazione precedente, vale che $U \cup W \subseteq U + W$; si può dimostrare che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$.

Oss: nell'esempio precedente



in questo caso

$$U + W = \mathbb{R}^2$$

Def: sia V uno spazio vettoriale su K; siano $v_1, \dots, v_n \in V$; allora una <u>combinazione lineare</u> di $v_1, \dots, v_n$ è un qualsiasi vettore della forma

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Esempio: in $\mathbb{Q}^2$, considero

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

allora una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 è ad esempio:

$$7 \cdot v_1 - \frac{13}{4} \cdot v_2 + \frac{9}{8} \cdot v_3$$

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; definiamo

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

$$= \{ \text{combinazioni lineari di } v_1, \dots, v_n \}$$

Prop: con la notazione precedente, $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim: 1. $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$, dunque $0 \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$

2. siano $u, w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ e mostriamo che $u + w \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$

per definizione $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ e $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$; allora

$$u + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i + \mu_i)}_{\in K} v_i$$

pertanto $u + w$ è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

3. sia $u \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ e $\lambda \in K$; mostriamo che $\lambda \cdot u \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$

per definizione $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ per certi $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$; pertanto

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda \mu_i)}_{\in K} \cdot v_i$$

pertanto $\lambda \cdot u$ è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.