Def: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale: diciamo che un sottoinsieme $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ è un <u>sistema di generatori</u> per U se ogni vettore di U si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_n$; equivalentemente se

$$U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$$

<u>Esempio</u>: consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ e $U = V$; i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per U; infatti, se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$ allora

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$$

notiamo che se $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un sistema di generatori per U.

<u>Oss</u>. se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori per U, allora per ogni $u \in U$, anche $\{u_1, \dots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per U (ogni sovrainsieme di un sistema di generatori è un sistema di generatori)

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono <u>linearmente dipendenti</u> se possiamo scrivere $0 \in V$ come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ in cui non tutti i coefficienti in K della combinazione lineare sono nulli, ovvero se vale

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

dove non tutti i $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono nulli; i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono <u>linearmente indipendenti</u> se non sono linearmente dipendenti, ovvero se l'unico modo di scrivere $0 \in V$ come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è scegliendo tutti i coefficienti uguali a zero, ovvero se dal fatto che

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

segue che $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

<u>Esempio</u>: in $V = \mathbb{R}^2$, consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti, infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti; infatti se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, il che è vero se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; una <u>base</u> di U è un insieme $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ tale che:

1. $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un sistema di generatori di U
2. $\{u_1, \dots, u_n\}$ sono linearmente indipendenti.

Prop. sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$; allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri; equivalentemente se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che v_j è combinazione lineare di $\underbrace{\{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}}_{v_j \text{ è escluso da questo insieme}}$

equivalentemente se esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che

$$v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$$

Dim. "$\Rightarrow$" supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente dipendenti e dimostriamo che esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$; per ipotesi vale che esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

quindi esiste $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\lambda_j \neq 0$, quindi

$$-\lambda_j \cdot v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

pertanto

$$v_j = \left(\frac{1}{-\lambda_j}\right)\left(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n\right)$$

ovvero v_j è combinazione lineare di $\{v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}$

"$\Leftarrow$" supponiamo che esista $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$, e dimostriamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente dipendenti; per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

allora

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + (-1) \cdot v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

e dato che $-1 \neq 0$, otteniamo che questa è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ in cui non tutti i coefficienti sono nulli, pertanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente dipendenti.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K; se esiste un sistema di generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ finito di V, allora V si dice <u>finitamente generato</u>.

<u>Teorema</u>: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$.

Dim: "$\Rightarrow$" sia $\mathcal{B}$ una base di V; dimostriamo che ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$; sia $v \in V$; dato che $\mathcal{B}$ è una base, essa è in particolare un sistema di generatori, e quindi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

rimane da dimostrare che tale scrittura è unica; per farlo supponiamo che

$$v = \mu_1 \cdot v_1 + \dots + \mu_n v_n \quad \text{con } \mu_1, \dots, \mu_n \in K$$

e mostriamo che $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda_n$; vale che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

quindi

$$(\lambda_1 - \mu_1) \cdot v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot v_n = 0$$

per ipotesi, $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti, dunque

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

"$\Leftarrow$" supponiamo ora che ogni $v \in V$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di $\{v_1, \dots, v_n\}$ e mostriamo che $\mathcal{B}$ è una base; per ipotesi $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono un sistema di generatori di V; rimane da dimostrare che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente indipendenti; per fare ciò supponiamo che valga

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

e dimostriamo che da ciò segue $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$; per farlo, notiamo che vale anche

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

per ipotesi, la scrittura di $0 \in V$ come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è unica, e quindi deve essere

$$\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0.$$

Def: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $v \in V$; allora possiamo scrivere v in modo unico come $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$; la n-upla $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ è detta la n-upla delle <u>coordinate</u> di v rispetto a $\mathcal{B}$.

<u>Esempio</u>: in K^n possiamo considerare

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di K^n; essa si dice la <u>base</u> <u>standard</u> di K^n ed è denotata $\mathcal{E}$; per ogni vettore $v \in K^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, le sue coordinate rispetto a $\mathcal{E}$ sono $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

<u>Esempio</u>: consideriamo lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a entrate in K, ovvero $M_{m,n}(K)$ e l'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & 0 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

si può dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $M_{m,n}(K)$ e che $\mathcal{B}$ è costituita da $m \cdot n$ elementi.

<u>Oss</u>: in K^n possiamo interpretare le nozioni di sistema di generatori e di indipendenza lineare in termini di sistemi lineari; infatti, se $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq K^m$ è un sistema di generatori per K^m, allora per ogni $v \in K^m$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$; se scriviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

allora la scrittura $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ è equivalente a:

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} \cdot \lambda_1 + \dots + a_{1n} \cdot \lambda_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1} \cdot \lambda_1 + \dots + a_{mn} \cdot \lambda_n \end{cases}$$

ovvero, in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

in altre parole otteniamo un sistema lineare del tipo $AX = b$ dove A è determinato da $v_1, \dots, v_n$ e b è determinato dal vettore $v \in K^m$ scelto; dire che $v_1, \dots, v_n$ è un sistema di generatori è quindi equivalente a dire che il sistema lineare precedente è compatibile qualsiasi sia b