Oss.: interpretiamo la nozione di indipendenza lineare per vettori in K^m in termini di sistemi lineari; siano dunque $v_1, \dots, v_n \in K^m$ e scriviamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

analogamente a quanto visto per la nozione di sistemi di generatori, se formiamo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora i vettori $v_1 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo precedente ammette come unica soluzione la soluzione nulla.

Discutiamo ora alcuni risultati importanti riguardo alle basi.

Teorema: (teorema di estrazione di una base)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un sistema di generatori per V, allora esiste $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ tale che $\mathcal{B}$ è una base di V.

Dim.: (idea) costruiamo la base cercata attraverso il cosiddetto <u>algoritmo dello scarto</u>; se $V = \{0\}$, allora per convenzione si prende $\mathcal{B} = \emptyset$; d'ora in poi supponiamo che $V \neq \emptyset$;

1. inizializziamo $\mathcal{B} = \emptyset$
2. consideriamo v_1; se $v_1 \neq 0$, allora lo aggiungiamo a $\mathcal{B}$, altrimenti lo scartiamo;
3. consideriamo v_2; se $v_2 \notin \operatorname{span}(v_1)$ (ovvero, se v_2 non è un multiplo di v_1) allora lo aggiungiamo a $\mathcal{B}$, altrimenti lo scartiamo
4. consideriamo v_3; se $v_3 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2)$, allora lo aggiungiamo a $\mathcal{B}$, altrimenti lo scartiamo;
5. ripetiamo i passi precedenti fino a v_k

si dimostra che l'insieme $\mathcal{B}$ così ottenuto è una base di V. □

Teorema: (teorema del completamento o dell'estensione)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e siano $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ vettori linearmente indipendenti; allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$ (ovvero i vettori $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere completati a una base)

Dim.: (idea) dal momento che V è finitamente generato, esiste $\{w_1, \dots, w_k\}$ sistema di generatori per V; consideriamo ora l'insieme

$$\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_k\}$$

per costruzione, anch'esso è un sistema di generatori per V; applichiamo dunque a esso il teorema di estrazione di una base; ora, dato che $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti, vale che $v_1 \neq 0$ e che $v_i \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_i)$ per $i \in \{2, \dots, k\}$ (perché altrimenti potremmo scrivere un vettore di $\{v_1 \dots v_p\}$ come combinazione lineare degli altri); pertanto l'algoritmo dello scarto non scarta nessuno tra $v_1, \dots, v_p$, e quindi in conclusione vale che, se $\mathcal{B}$ è la base costruita dall'algoritmo, allora $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathcal{B}$. □

I due risultati precedenti permettono di caratterizzare le basi degli spazi vettoriali come:

A. sistemi di generatori minimali
B. insiemi linearmente indipendenti massimali.

Lemma: (lemma di Steinitz)
sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V; allora per ogni $k > n$ e per ogni scelta di vettori $w_1, \dots, w_k \in V$ vale che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.

Oss.: in $\mathbb{R}^3$ esiste la base standard $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, quindi ogni insieme di 4 o più vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente dipendente.

Teorema: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; siano

$$\{v_1, \dots, v_n\} \quad e \quad \{w_1, \dots, w_m\}$$

due basi di V; allora

$$\boxed{n = m}$$

(equivalentemente, tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi).

Dim.: dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base e $\{w_1, \dots, w_m\}$ è un insieme linearmente indipendente, per il lemma di Steinitz $m \leq n$;
dato che $\{w_1, \dots, w_m\}$ è una base e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme linearmente indipendente, per il lemma di Steinitz $n \leq m$;
in definitiva $n = m$.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato:

- se $V = \{0\}$, definiamo la <u>dimensione</u> di V come zero, (e definiamo l'insieme vuoto come una sua base)
- se $V \neq \{0\}$, definiamo la <u>dimensione</u> di V come il numero di elementi di una sua base qualsiasi (questo numero è ben definito visto il teorema precedente)

indichiamo la dimensione di V con $\dim V$.

Esempi:
- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, infatti $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$
- $\dim K^n = n$ (per il medesimo motivo del punto precedente)
- $\dim M_{m,n}(K) = m \cdot n$ (una base di $M_{m,n}(K)$ è costituita da tutte le matrici con una singola entrata uguale a 1 e tutte le altre entrate uguali a 0)

Oss.: tutti i risultati precedenti, assieme al concetto di dimensione, si applicano anche ai sottospazi vettoriali.

Prop.: sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, allora:

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$.

Con la nozione di dimensione abbiamo associato un <u>numero naturale</u> a uno spazio vettoriale; ora cerchiamo di associare un numero naturale a una matrice.

Def.: sia $A \in M_{m,n}(K)$; definiamo il <u>rango</u> di A, e lo denotiamo con $rg(A)$, il numero naturale

$$rg(A) = \dim \underbrace{\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{\text{sottospazio di } K^m \text{ generato dalle colonne di } A}$$

Oss.: se $A \in M_{m,n}(K)$, allora

- $rg(A) \leq m$, infatti $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in K^m$ e quindi
$$\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m, \quad \text{quindi}$$
$$\underbrace{\dim\left(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})\right)}_{rg(A)} \leq \underbrace{\dim K^m}_{m}$$
- $rg(A) \leq n$, infatti $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$ è un sistema di generatori per $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ e quindi per il teorema di estrazione di una base esiste una base $\mathcal{B}$ di $\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ tale che $\mathcal{B} \subseteq \{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$, dunque $\mathcal{B}$ ha al massimo n elementi e pertanto $\dim\left(\operatorname{span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})\right) \leq n$.
- in definitiva, $rg(A) \leq \min\{n, m\}$.

Esempio: consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

sappiamo che $rg(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$; se fosse $rg(A) = 1$, allora tutte le colonne di A sarebbero proporzionali tra di loro, cosa che non è, quindi $rg(A) = 2$.

Esempio: $rg(\mathbb{1}_n) = \dim \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$= \dim K^n = n$$

Prop.: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $\tilde{A}$ una matrice ottenuta da A applicando le tre operazioni fondamentali; allora:

1. $rg(A) = rg(\tilde{A})$
2. se $\tilde{A}$ è a scala, allora
$$rg(\tilde{A}) = \text{numero di righe non nulle di } \tilde{A}$$

Prop.: $rg(A) = rg({}^tA)$

Questi due risultati ci forniscono un <u>algoritmo</u> per calcolare il rango, ovvero prendiamo una matrice, effettuiamo l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss e la portiamo a scala e infine contiamo il numero di righe non nulle della matrice a scala.