



# Costruzioni in Acciaio e Vetro

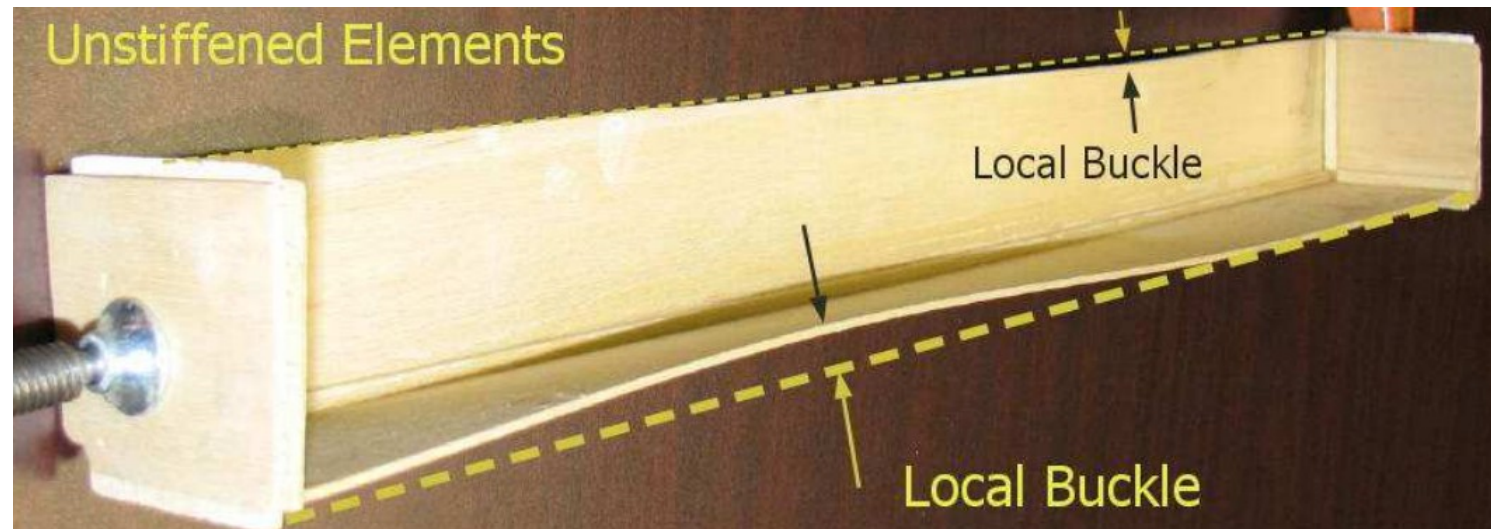
Stabilità laterale  
(o flessso-torsionale, o svergolamento)

# Introduzione





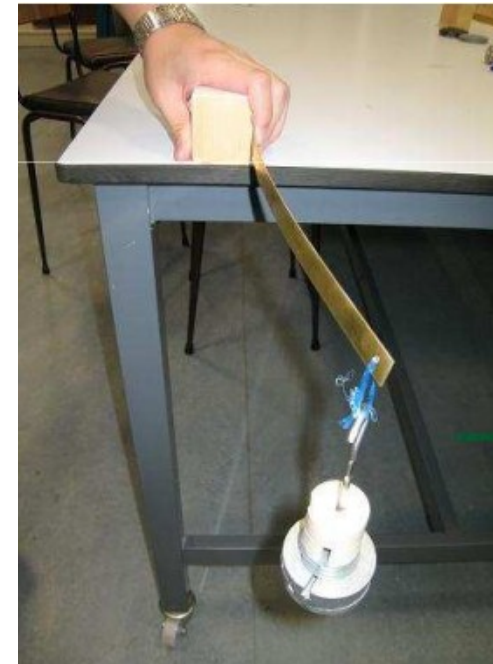
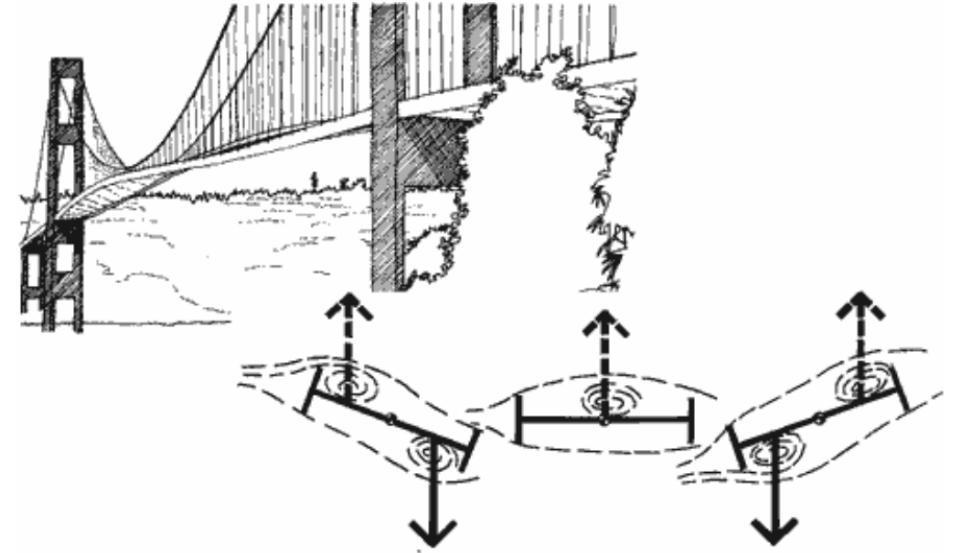
# Introduzione



# Introduzione

Si distinguono tre diversi meccanismi instabili:

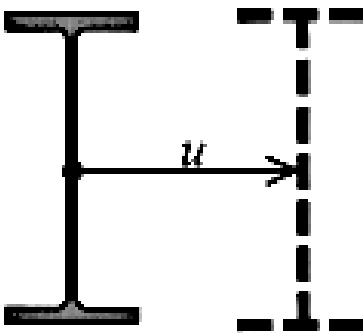
- instabilità flessionale
- instabilità torsionale
- instabilità flesso-torsionale



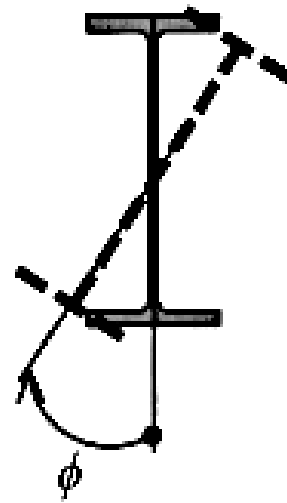
# Introduzione

- **instabilità flessionale:** lo spostamento rigido della sezione trasversale è di traslazione pura ed è contrastata dalla rigidezza flessionale  $EJ$  dell'elemento strutturale; per questa ragione lo spostamento avviene nel piano di minore rigidezza flessionale

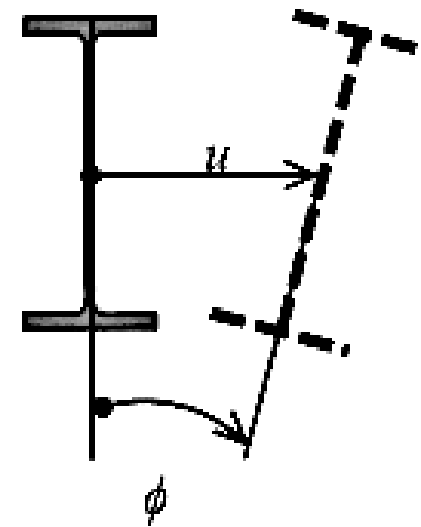
Flessionale pura



Torsionale pura



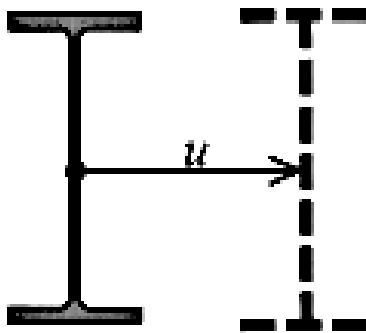
Flesso-torsionale



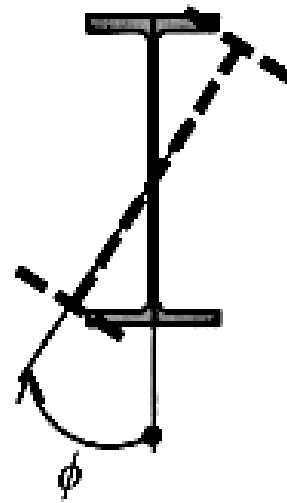
# Introduzione

- **instabilità torsionale:** lo spostamento rigido della sezione trasversale è costituito da una rotazione intorno all'asse geometrico dell'elemento strutturale, contrastata dalla rigidezza torsionale  $GJ_t$

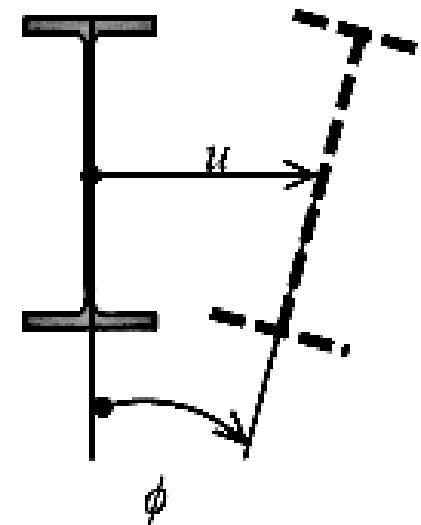
Flessionale pura



Torsionale pura



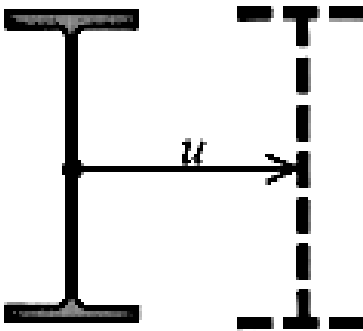
Flesso-torsionale



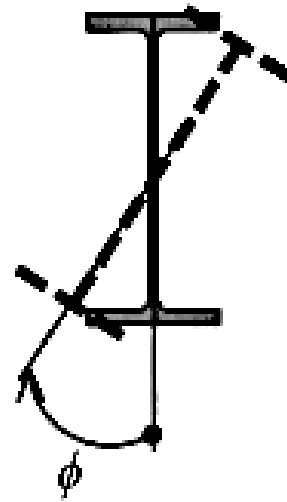
# Introduzione

- **instabilità flessio-torsionale:** lo spostamento rigido è una combinazione di quelli descritti in precedenza e può manifestarsi nel caso delle **travi inflesse**; questo fenomeno è anche indicato con il termine di svergolamento e determina spostamenti della sezione trasversale ortogonali a quelli dovuti alla flessione, accompagnati da rotazioni torsionali

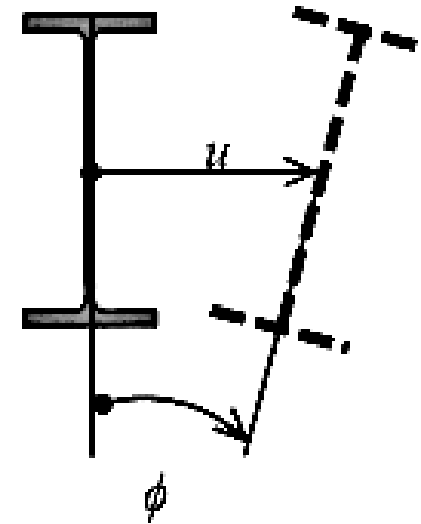
Flessionale pura



Torsionale pura



Flessio-torsionale



# Aste inflesse

- Per la mensola caricata in figura, a un certo punto del processo di carico, la forza applicata raggiunge un particolare valore per cui si verifica un fenomeno dell'instabilità flessio-torsionale:
  - **la sezione di estremità**, invece di traslare semplicemente, subisce un improvviso spostamento laterale accoppiato a una rotazione intorno all'asse longitudinale della trave
  - **la zona compressa** del profilo è associato ad una snellezza che regola il fenomeno dell'instabilità
  - **la zona tesa** cerca di svolgere il ruolo di vincolo per la zona compressa che sbanda
  - Il diverso comportamento dei due correnti induce una **rotazione torsionale** della sezione
- È il problema tipico dei correnti compressi non adeguatamente vincolati ai solai, e in generale delle aste inflesse in cui la piattabanda compressa non è opportunamente / sufficientemente vincolata lateralmente, ma è suscettibile a sbandamento laterale (svergolamento)





# Aste inflesse

Le travi inflesse possono sbandare lateralmente e torcersi collassando senza aver raggiunto la massima portanza a flessione

Parametri principali:

- Rigidezza flessionale
- Rigidezza torsionale
- Posizione del carico rispetto al baricentro
- Lunghezza della trave
- Vincoli
- Distribuzione dei carichi

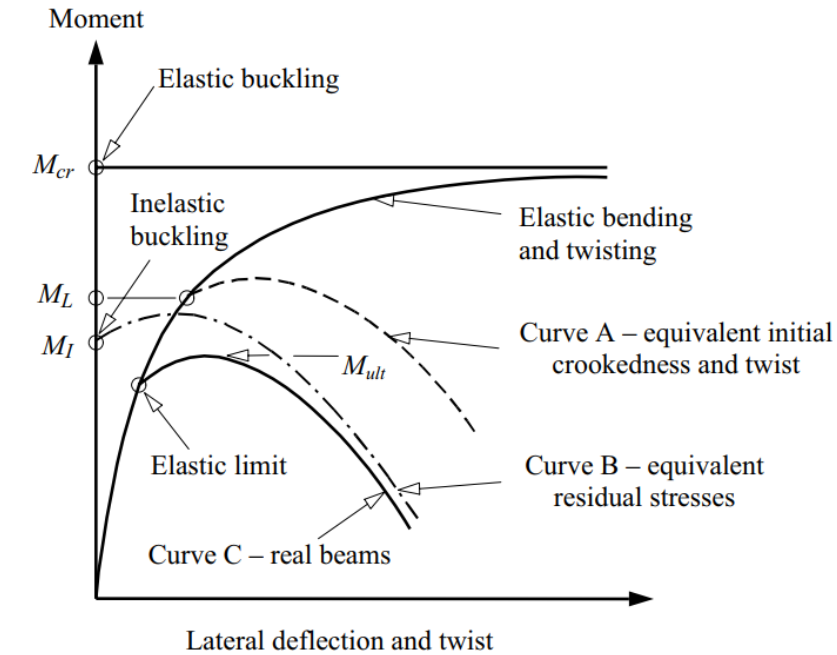
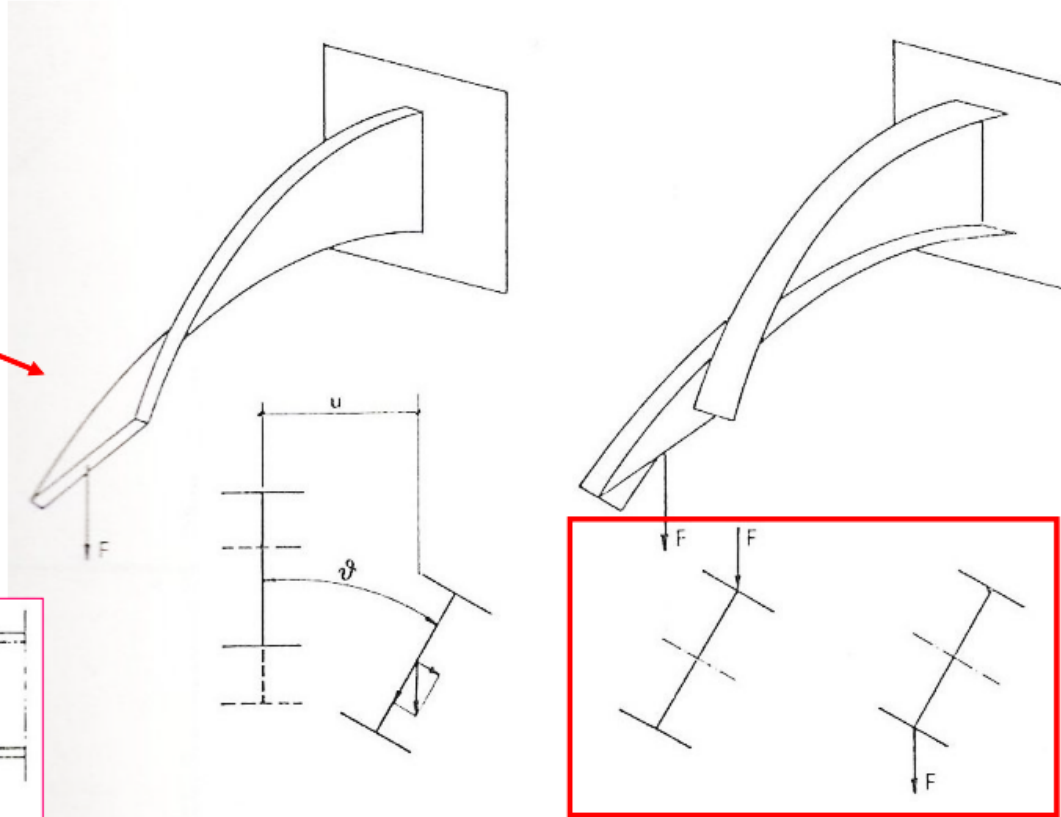


Figure 6.11 Behaviour of real beams.

# Problema

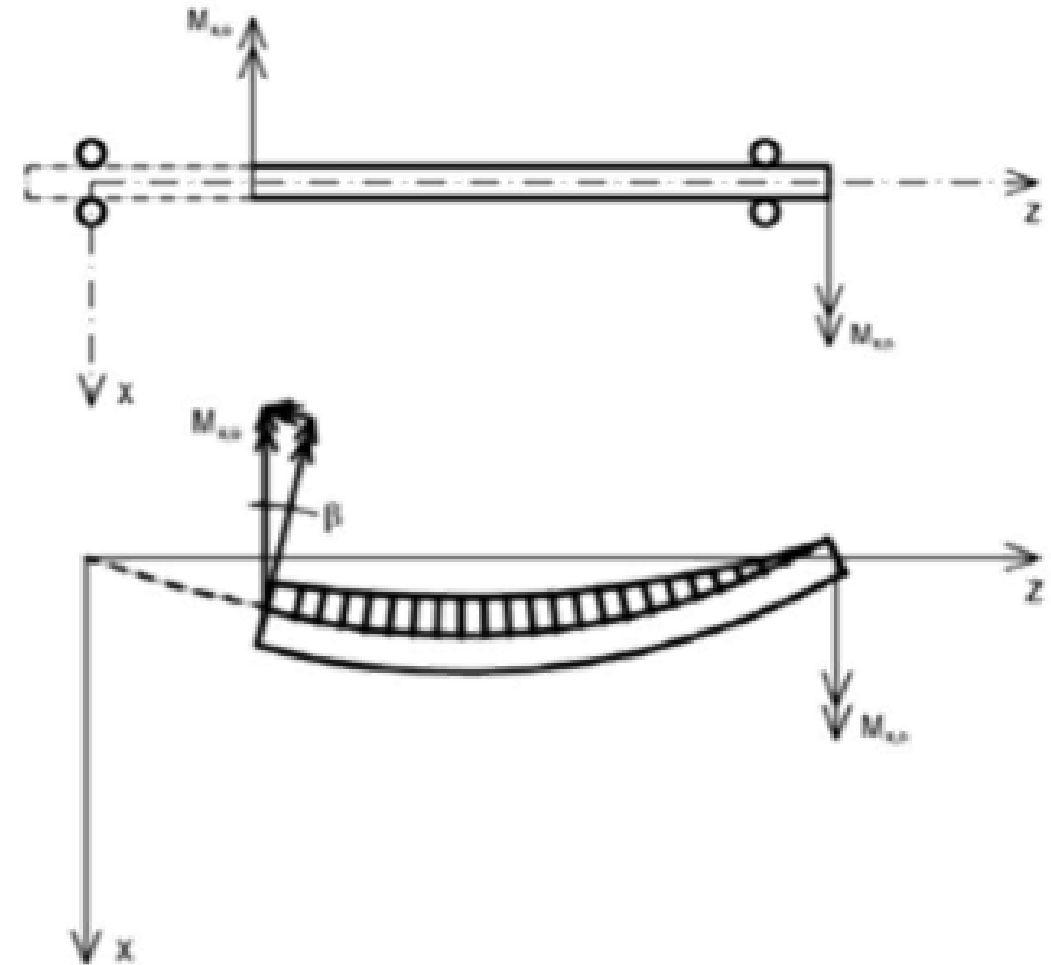
## Ipotesi di calcolo

La trave è da considerarsi:

- Elastica
- Priva di imperfezioni iniziali
- Sottoposta a flessione retta (momento costante  $M_{x,0}$ )

Inoltre:

- Vincoli a cerniera / carrello nel piano yz della trave
- Lo spostamento laterale (in direzione x) e la torsione della trave sono impediti alle estremità
- Ipotesi di piccoli spostamenti / deformazioni nel piano della trave (cioè  $J_x \gg J_y$ )
- L'ingobbamento è libero (non impedito)



# Problema

Si approssima e:

(flessione nel piano)

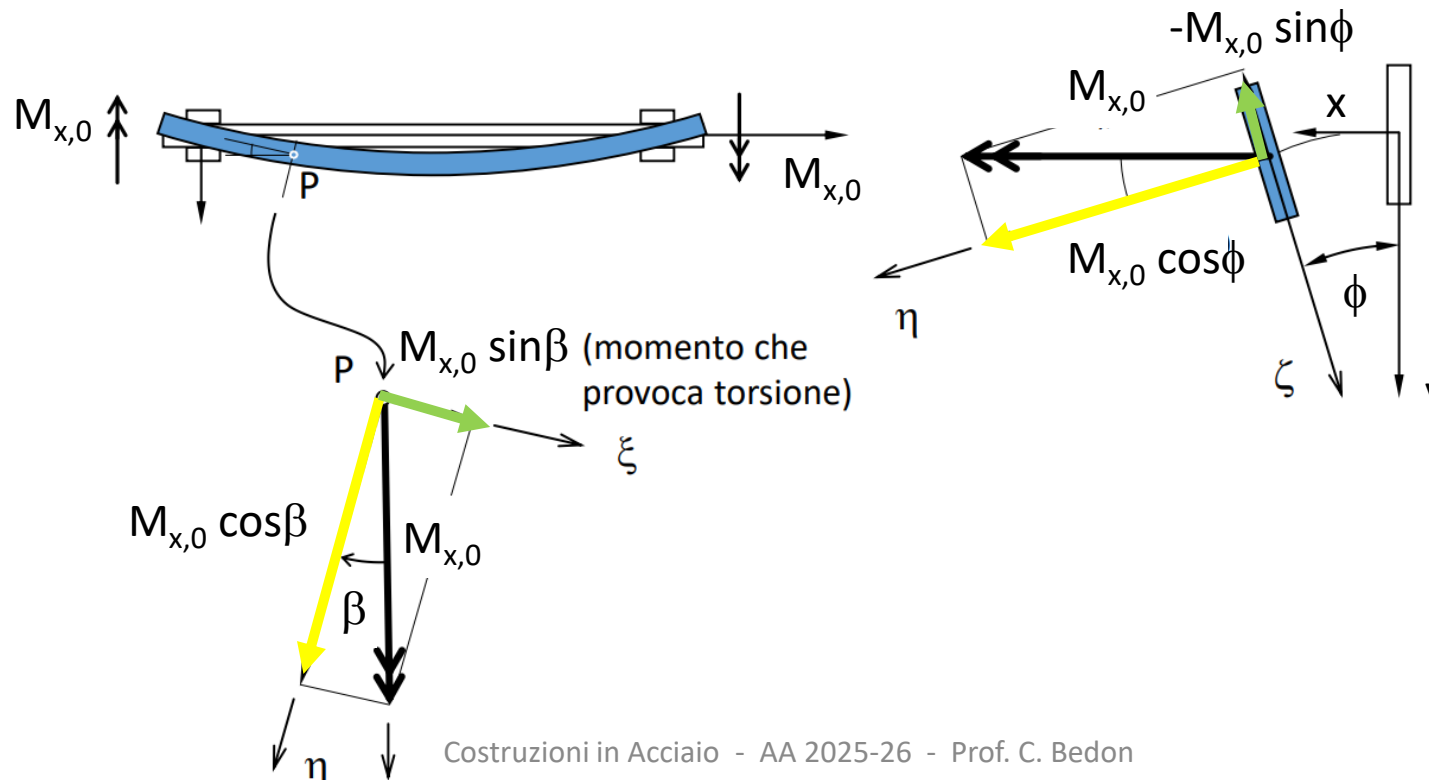
(flessione laterale)

(torsione)

$$M_{\eta} = M_{x,0}$$

$$M_{\eta} = -M_{x,0} \sin\phi = -M_{x,0} \phi$$

$$M_{\xi} = M_{x,0} \sin\beta = M_{x,0} \tan\beta = M_{x,0} du/dz$$



# Problema

Rigidezza flessionale laterale del profilo (rispetto all'asse forte e debole)



Configurazione iniziale

$$M_{x,o} = -EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (16.1)$$

$$M_y = 0 \quad (16.2)$$

$$M_t = 0 \quad (16.3)$$

Configurazione variata

$$M_{x,o} = -EJ_x \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (16.4)$$

$$M_y = M_{x,o} \cdot \phi = -EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (16.5)$$

$$M_t = M_{x,o} \frac{du}{dz} = GJ_t \frac{d\phi}{dz} \quad (16.6)$$

Per determinare  $M_{x,o,cr}$  sono sufficienti le ultime due equazioni di equilibrio della configurazione variata, che contengono le incognite  $\phi = \phi(z)$  ed  $u = u(z)$ . Manipoliamo le due equazioni differenziali per ricondurci ad una sola equazione. In particolare eliminiamo la funzione incognita  $u = u(z)$ .



Rigidezza torsionale primaria del profilo

Dalla equazione numero 16.5 si ricava:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{M_{x,o} \cdot \phi}{EJ_y} \quad (16.7)$$

Deriviamo poi l'equazione 16.6 rispetto a z:

$$M_{x,o} \frac{d^2 u}{dz^2} = GJ_t \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (16.8)$$

Ricaviamo quindi  $\frac{d^2 u}{dz^2}$ :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{GJ_t}{M_{x,o}} \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (16.9)$$

Uguagliando le due espressioni di  $\frac{d^2 u}{dz^2}$  si ha:

$$\frac{GJ_t}{M_{x,o}} \frac{d^2 \phi}{dz^2} = -\frac{M_{x,o} \cdot \phi}{EJ_y} \quad (16.10)$$

# Soluzione

Rigidezza flessionale laterale del profilo (misurata solitamente rispetto all'asse debole)

Rigidezza torsionale secondaria del profilo

Rigidezza torsionale primaria del profilo

$$M_{cr}^{(E)} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t \left( 1 + \frac{EJ_\omega \pi^2}{GJ_t l^2} \right)}$$

Si noti che ponendo  $EJ_\omega = 0$  si ritrova la 16.18. In termini di tensioni avremo:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{W} \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t \left( 1 + \frac{EJ_\omega \pi^2}{GJ_t l^2} \right)}$$

Il caso fin qui considerato di  $M_x = cost$ , carico uniforme e trave appoggiata può essere esteso ad altre condizioni di vincolo e di carico, introducendo un coefficiente  $k$ :

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{1}{W} \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_t} \cdot \sqrt{1 + \frac{EJ_\omega \pi^2}{GJ_t l^2}} \quad (16.19)$$

Esso dipende da vincolo e carico e può essere visto come prodotto di due fattori:

$$k = k_1 \cdot k_2$$

con  $k_1$  dipendente da condizioni di vincolo e carico e  $k_2$  dipendente dalla posizione del carico.



# Soluzione

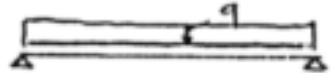
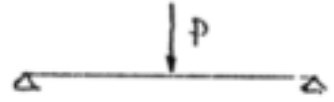
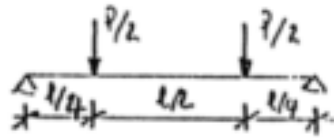
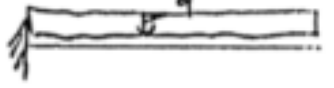
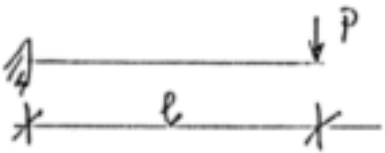
|                                                                                      | VALORI CRITICI                                | $M_{max}$         | $k_1$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------|-------|
|    | $M_{CE} = \frac{\pi}{l} \sqrt{(\dots)}$       | $M$               | 1     |
|    | $M_{CE} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{(\dots)}$      | $M$               | 0,5   |
|    | $(q l)_{CE} = \frac{2,83}{l} \sqrt{(\dots)}$  | $\frac{q l^2}{8}$ | 1,13  |
|    | $P_{CE} = \frac{16,99}{l} \sqrt{(\dots)}$     | $\frac{P l}{4}$   | 1,35  |
|    | $P_{CE} = \frac{26,6}{l} \sqrt{(\dots)}$      | $\frac{P l}{8}$   | 1,04  |
|   | $(q l)_{CE} = \frac{13,85}{l} \sqrt{(\dots)}$ | $\frac{q l^2}{2}$ | 2,05  |
|  | $P_{CE} = \frac{4,013}{l} \sqrt{(\dots)}$     | $P l$             | 1,28  |

Figura 16.1: Valori di  $k_1$

# Approccio EC3

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \leq 1$$

Il momento resistente di progetto all'instabilità di una trave non controventata lateralmente dovrà essere assunto pari a:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \frac{\beta_W W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M1}} \quad (16.20)$$

dove, al solito,  $\beta_W$  è il parametro che tiene conto della classe della sezione:

$\beta_W = 1$  per sezioni trasversali di Classe 1 o 2;

$\beta_W = W_y / W_{pl,y}$  per sezioni trasversali di Classe 3;

$\beta_W = W_{eff,y} / W_{pl,y}$  per sezioni trasversali di Classe 4;

Analogamente all'asta caricata di punta,  $\chi_{LT}$  è un coefficiente di riduzione. Esso conserva anche la stessa forma analitica:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2}}$$

(con la limitazione  $\chi_{LT} \leq 1$ ), nella quale

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + \alpha_{LT}(\lambda_{LT} - 0,2) + \lambda_{LT}^2]$$

I valori dei coefficienti di imperfezione  $\alpha_{LT}$  per l'instabilità flessione-torsionale devono essere assunti pari a:

$\alpha_{LT} = 0,21$  per le sezioni laminate;

$\alpha_{LT} = 0,49$  per le sezioni saldate.

Tab. 4.2.IX (b) - Definizione delle curve di stabilità per le varie tipologie di sezione e per gli elementi inflessi

| Sezione trasversale       | Limiti       | Curva di instabilità da Tab. 4.2.VIII |
|---------------------------|--------------|---------------------------------------|
| Sezione laminata ad I     | $h/b \leq 2$ | b                                     |
|                           | $h/b > 2$    | c                                     |
| Sezione composta saldata  | $h/b \leq 2$ | c                                     |
|                           | $h/b > 2$    | d                                     |
| Altre sezioni trasversali | -            | d                                     |

Tab. 4.2.IX (a) Valori raccomandati di  $\alpha_{LT}$  per le differenti curve di stabilità.

| Curva di stabilità                    | a    | b    | c    | d    |
|---------------------------------------|------|------|------|------|
| Fattore di imperfezione $\alpha_{LT}$ | 0,21 | 0,34 | 0,49 | 0,76 |

# Approccio EC3

Il valore di  $\bar{\lambda}_{LT}$  può essere determinato dall'espressione:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{\beta_W W_{pl,y} f_y}{M_{cr}}} = \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \sqrt{\beta_W}$$

dove  $\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,3 \cdot \epsilon$  con:  $\epsilon = \sqrt{235/f_y}$  e  $M_{cr}$  il momento critico elastico per instabilità flessio-torsionale.

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}$$

$$\phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2]$$

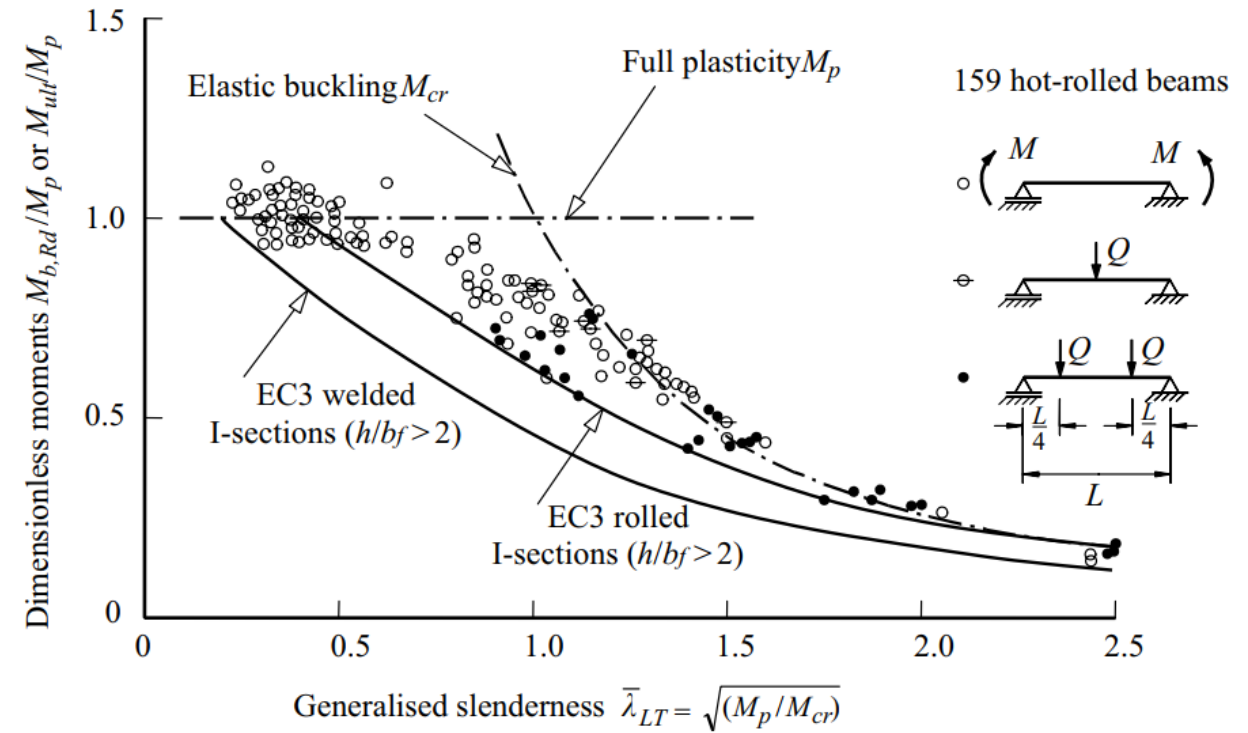
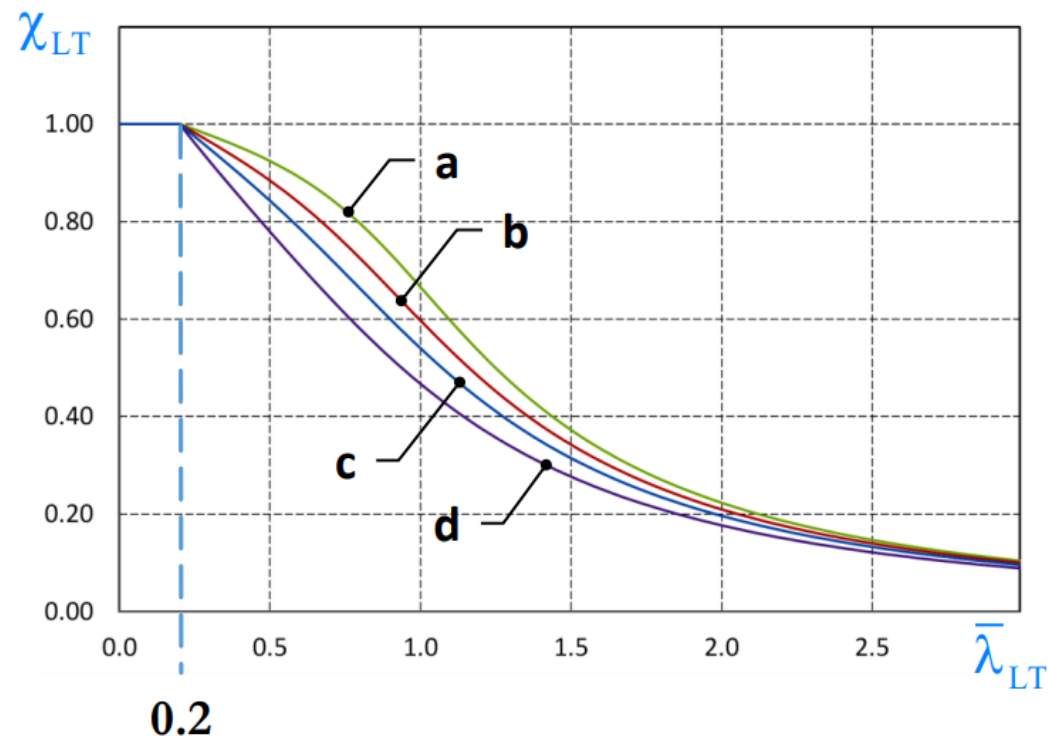


Figure 6.12 Moment resistances of beams in near-uniform bending.

# Approccio EC3

Valori raccomandati  
per il fattore di imperfezione

| Curva         | a    | b    | c    | d    |
|---------------|------|------|------|------|
| $\alpha_{LT}$ | 0.21 | 0.34 | 0.49 | 0.76 |



# Approccio EC3

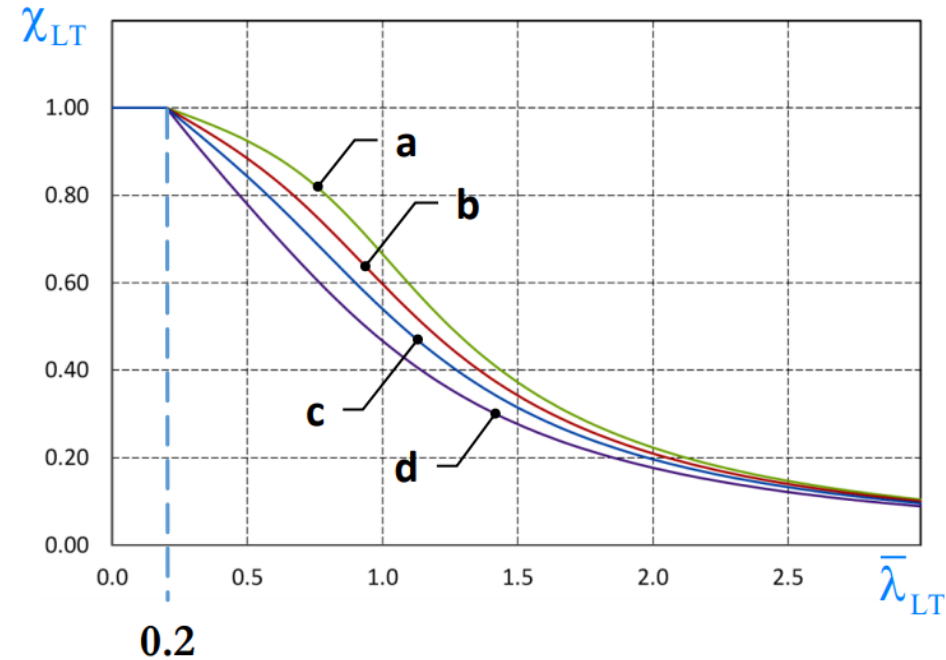
$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \frac{\beta_W W_{pl,y} f_y}{\gamma_{M1}}$$

Nel caso generale, si può assumere  $f = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  
e  $\alpha_{LT,0} = 0,2$

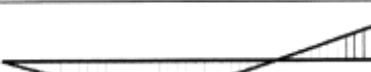
con

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1,0 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases} \quad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

$$f = 1 - 0,5(1 - k_c) \left[ 1 - 2,0(\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad \Phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$



# Approccio EC3

| Distribuzione del momento flettente                                                                          | Fattore correttivo $k_c$           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|  $\psi = M_{dx}/M_{sx} = 1$ | 1,0                                |
|  $-1 \leq \psi \leq 1$      | $\frac{1}{1.33 - 0.33 \cdot \psi}$ |
|                             | 0.94                               |
|                             | 0.90                               |
|                             | 0.91                               |
|                            | 0.86                               |
|                           | 0.77                               |
|                           | 0.82                               |

con

$$\chi_{LT} = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq \begin{cases} 1,0 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \cdot \frac{1}{f} \end{cases} \quad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_{yk}}{M_{cr}}}$$

$$f = 1 - 0,5(1 - k_c) \left[ 1 - 2,0(\bar{\lambda}_{LT} - 0,8)^2 \right] \quad \Phi_{LT} = 0,5 \left[ 1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - \bar{\lambda}_{LT,0}) + \beta \cdot \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$
