28 Ottobre 2025

D.: Come assegnare un sistema lineare?

R.: $\Lambda = \mathbb{P}(\mathcal{U})$ → Eq. Cartesiane
→ Base
→ Eq. Parametriche

spazio vettoriale

codifica certe curve grado d in $(n+1)$-incognite

$$\underbrace{\binom{n+d}{n}}_{\text{INCOGNITE}} - \underbrace{(q+1)}_{\text{EQUAZIONI LIN. INDIP.}}$$

Def: Una **CONDIZIONE LINEARE** su $\mathbb{K}[x_0 \ldots x_{n+1}]_d$ è un'equazione lineare omogenea dove le indeterminate sono i coefficienti di un generico polinomio omogeneo di $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$.

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{\vec{i} : \sum_{j=0}^{n+1} i_j = d} \omega_{\vec{i}} \vec{X}^{\vec{i}}$$

$\vec{i} = (i_0, \ldots, i_{n+1})$

$\vec{X} = (x_0, \ldots, x_{n+1})$

Esempio: PASSAGGIO PER UN PUNTO DATO $\begin{bmatrix}\text{CONDIZIONE} \\ \text{CODIM}=1, \text{DEG}=d\end{bmatrix}$

Imponiamo che le ipersuperfici considerate PASSINO PER IL PUNTO A
$A = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ quindi questo corrisponde ad imporre:

$$\Lambda_A : \sum_{\vec{i} : \sum i_j = d} \omega_{\vec{i}} \vec{X}^{\vec{i}} \Big|_{\vec{X} = \vec{a}} = 0$$

Esempio: SINGOLARITÀ IN UN PUNTO DATO $\left[\begin{array}{l}\text{CONDIZIONE} \\ \text{CODIM} = n+1 \\ \text{DEG} = d-1\end{array}\right]$

Imponiamo che le ipersuperfici considerate ABBIANO UNA SINGOLARITÀ NEL PUNTO $A = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$, questo corrisponde ad imporre:

$$\Lambda_A^{\text{sing}} : \nabla F(a_0, \dots, a_n) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \partial_0 F(\vec{a}) = 0 \\ \partial_1 F(\vec{a}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n F(\vec{a}) = 0 \end{cases}$$

$n+1$ eq$^{\text{ni}}$ LIN. INDIP.

Esplicitamente:

$$\partial_j F = \sum_{\vec{i} : \sum i_j = d} w_{\vec{i}}\, i_j\, \vec{x}^{\,\vec{i} - \delta_j}$$

$\leftarrow$ TOGLIE 1 NELLA j-ESIMA COMPONENTE DEL VETTORE $\vec{i}$

$j = 0, \dots, n$

Il passaggio per A (i.e. $F(A) = 0$) è garantito (NEL PROIETTIVO) da Eulero: $\sum_{j=0}^{n} x_j \partial_j F = d \cdot F$ (VALUTO IN A)

Esempio: PASSAGGIO PER PUNTO A CON TANGENTE PER A DATA

Imponiamo che le ipersuperfici considerate passino per $(n=2)$ $A = (a_0 : \dots : a_2)$ e siano singolari in A oppure abbiano L come retta tangente in A.

① Passaggio per $A \iff F(A) = 0$

② Se A liscio sia $L = \tau_A Z_p(F) \iff \exists R \in \tau_A Z_p(F)$

$$R \neq A$$

PUNTO DI COORDINATE $(r_0 : r_1 : r_2)$

perché per due punti passa una ed una sola retta.

Quindi vogliamo imporre:

$$\Lambda_A^{tang} : \nabla F(A) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x_0 = r_0 \\ x_1 = r_1 \\ x_2 = r_2}} = 0$$

per qualche $\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \in \underline{\underline{L}}$

Conclusione: $\underline{\text{codim} = 2}$ se A liscio, se A singolare, il luogo ha codim $= n+1 \big|_{n=2} = 3$

$\hookrightarrow F(A) = 0$ $\quad \deg = d$

$\hookrightarrow \nabla F(A) \cdot \vec{R} = 0$ $\quad \deg = d-1$

$\exists R \in L$

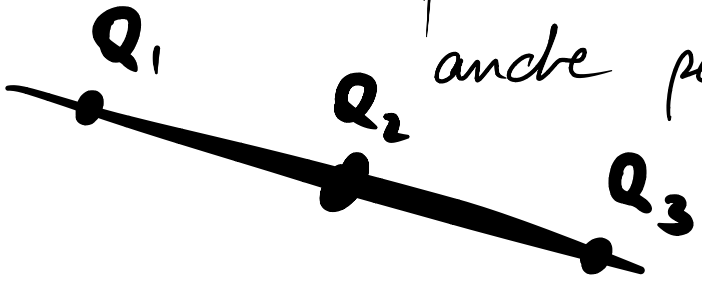
ha codim più alta ed è contenuto dentro al luogo Λ_A^{sing}

$$\underset{\text{codim} = n+1}{\Lambda_A^{sing}} \subsetneq \underset{\text{codim} = 2}{\Lambda_A^{tang}}$$

Perché se $\nabla F(A) = 0$ allora il suo prodotto con ogni vettore fa sempre zero.

Esempio: PASSAGGIO PER r PUNTI $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{P}^n$

Ognuno dà codim $= 1$, ma queste condizioni sono LIN. DIP. $\Longleftrightarrow$ quando una ipersuperficie passa per $r-1$ punti allora è automatico che passi anche per l'r-esimo punto.



IL TERZO PUNTO ALLINEATO CI DÀ UNA CONDIZIONE RIDONDANTE, i.e. È LIN. DIP. ALLE ALTRE DUE CONDIZIONI CHE ABBIAMO GIÀ, MA QUESTO DIPENDE DAL FATTO CHE $d=1$ (RETTE), PER $d=3$ (CUBICHE) NON SAREBBE PIÙ LIN. DIP.!

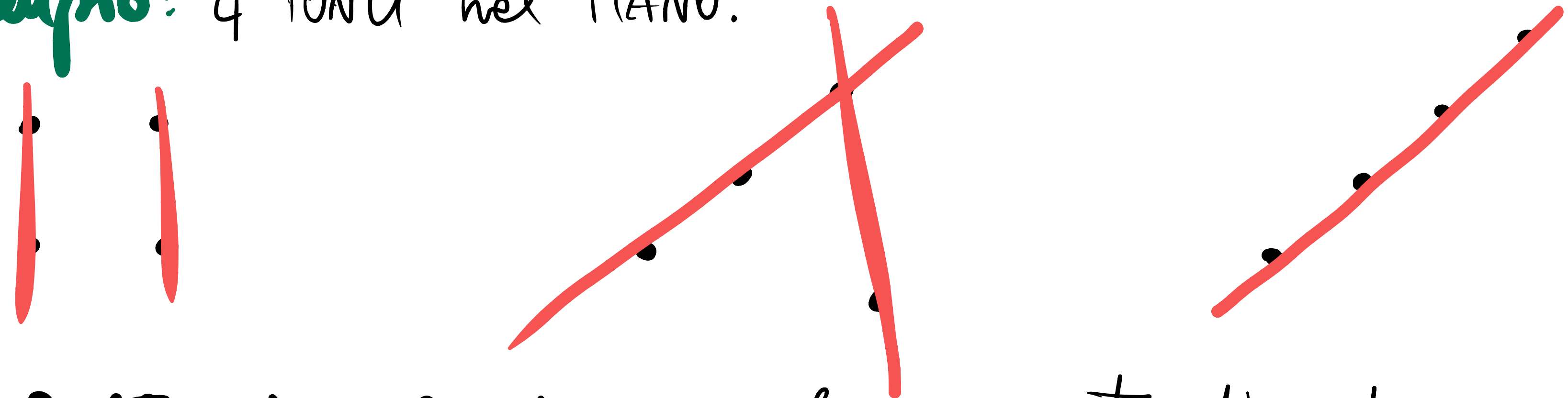
$\boxed{\textbf{PROP}}$ r CONDIZIONI LINEARI date dal PASSAGGIO per i punti $Q_1, \dots, Q_r$ sono **LIN. INDIP.** $\Longleftrightarrow$ $\forall Q_i \ \exists F_i \in K[x_0, \dots, x_n]_d$:

$$F_i(Q_j) = \underset{\neq 0}{\mathrm{cost}_i} \cdot \delta_{ij}$$

$(F_i(Q_i) \neq 0, \quad F_i(Q_j) = 0 \ \forall j \neq i)$.

Def: Fissiamo $d \geq 1$. Se $Q_1, \dots, Q_r$ sono condizioni **LIN. INDIP.** $\Rightarrow Q_1, \dots, Q_r$ sono **IN POSIZIONE GENERALE** (generica) rispetto alle ipersuperfici di $\deg = d$

Esempio: 4 PUNTI nel PIANO.



4 PUNTI ALLINEATI sono linearmente dipend. per $d=1$, $d=2$

" indipendenti per $d=3$

Def: Λ sistema lineare di curve piane $(n=2)$
Il **LUOGO BASE** di Λ

$$Bs(\Lambda) := \{ Q \in \mathbb{P}^2 : F(Q) = 0, \forall [F] \in \Lambda \}$$

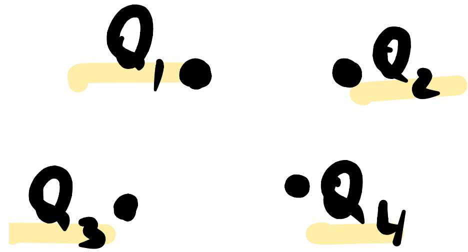
CIOÈ QUEI PUNTI PER CUI PASSANO TUTTE LE CURVE DEL SISTEMA LINEARE.

Oss: Se $\Lambda := \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, \dots, F_q)) \Rightarrow Bs(\Lambda) = \bigcap_{i=0}^{q} Z_p(F_i)$

Esempio: $\dim(\Lambda) = q = 1$ e $\Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(F_0, F_1))$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

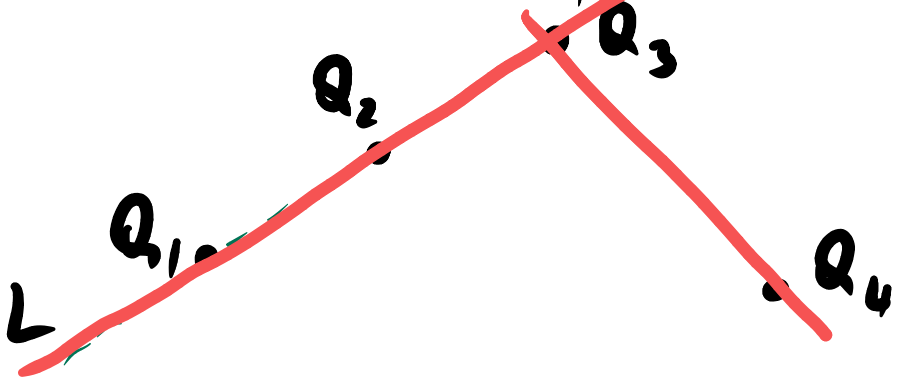
$$\Rightarrow Bs(\Lambda) = Z_p(F_0) \cap Z_p(F_1) \underset{\text{Bezout}}{\neq} \emptyset$$

Esempio: $d=2$, $n=2$, fisso 4 punti $Q_1, \dots, Q_4$ e impongo le condizioni lineari di $Q_1, \dots, Q_4$ presi così



$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \\ \dim(\Lambda) = \underbrace{N(2,2)}_{\binom{2+2}{2} - 1 = 6 - 1 = 5} - \overbrace{\mathrm{codim}(\Lambda)}^{=4} = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

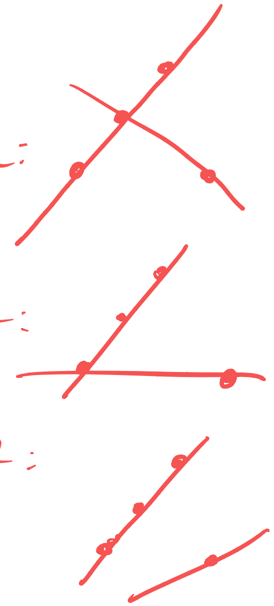
Esempio: $d=2$, $n=2$, fisso 4 punti $Q_1, \dots, Q_4$ e impongo le condizioni lineari di $Q_1, \dots, Q_4$ presi così:



oppure:

oppure:

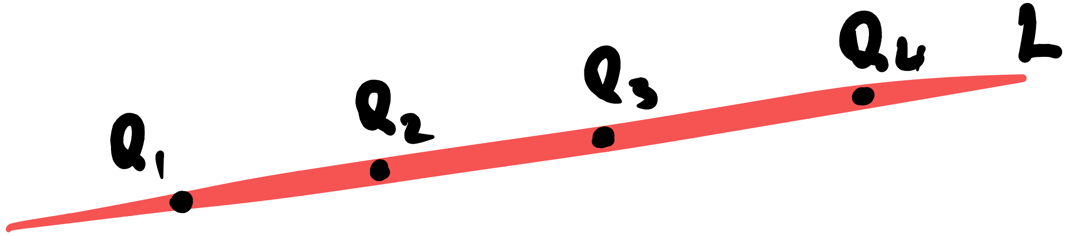
oppure:



$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda) = L \cup \{Q_4\} \\ \dim(\Lambda) = \underbrace{N(2,2)}_{\text{5 come prima}} - \underbrace{\operatorname{codim}(\Lambda)}_{\text{3 perché condizione }(Q_3)\text{ è linearm. dipendente dalle quelle di } Q_1 \text{ e } Q_2.} = 5-3=2 \end{cases}$$

Osservazione: $Bs(\Lambda)$ non è "equidimensionale", cioè ha compon. di dimensione diversa.

Esempio: $d=2$, $n=2$, fisso 4 punti $Q_1, \dots, Q_4$ e impongo le condizioni lineari di $Q_1, \dots, Q_4$ presi così:



oppure

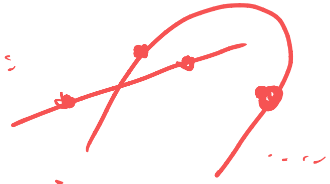
RETTA DOPPIA

$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda) = L \\ \dim(\Lambda) = \underbrace{N(2,2)}_{\text{5 come prima}} - \underbrace{\operatorname{codim}(\Lambda)}_{\text{2}} = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

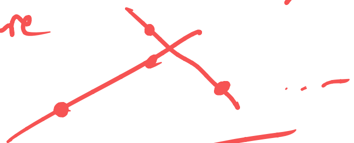
2 perché condizioni (Q_3, Q_4) sono linearm. dipendenti dalle quelle di Q_1 e Q_2.

Esempio: $d=3$, $n=2$, fisso 4 punti $Q_1,\dots,Q_4$ e impongo le condizioni lineari di $Q_1,\dots,Q_4$:

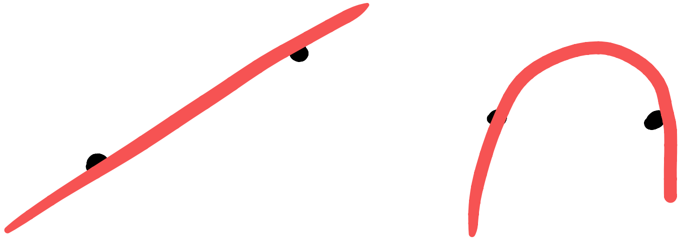
oppure:



oppure



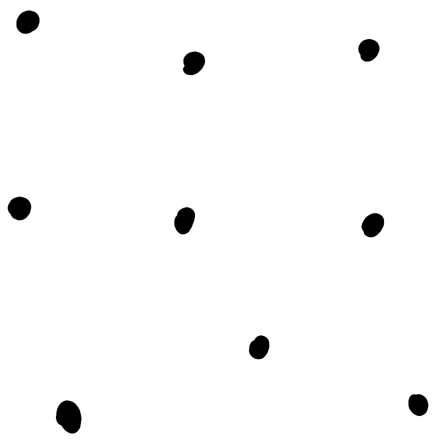
oppure



SE UNA CUBICA PASSA PER 3 PUNTI NON DEVE ANCHE NECESSARIAMENTE PASSARE PER IL QUARTO ➡ CONDIZIONI $Q_1,\dots,Q_4$ **LIN. INDIP.**

$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda)=\{Q_1,\dots,Q_4\} \\ \dim(\Lambda)=\underbrace{N(3,2)}_{9=\binom{5}{2}-1}-\underbrace{\operatorname{codim}(\Lambda)}_{4 \text{ per indipendenza lineare}}=5 \end{cases}$$

Esempio: $d=3$, $n=2$, fisso 9 punti $Q_1,\dots,Q_9$ e impongo le condizioni lineari di $Q_1,\dots,Q_9$ in posizione generale:



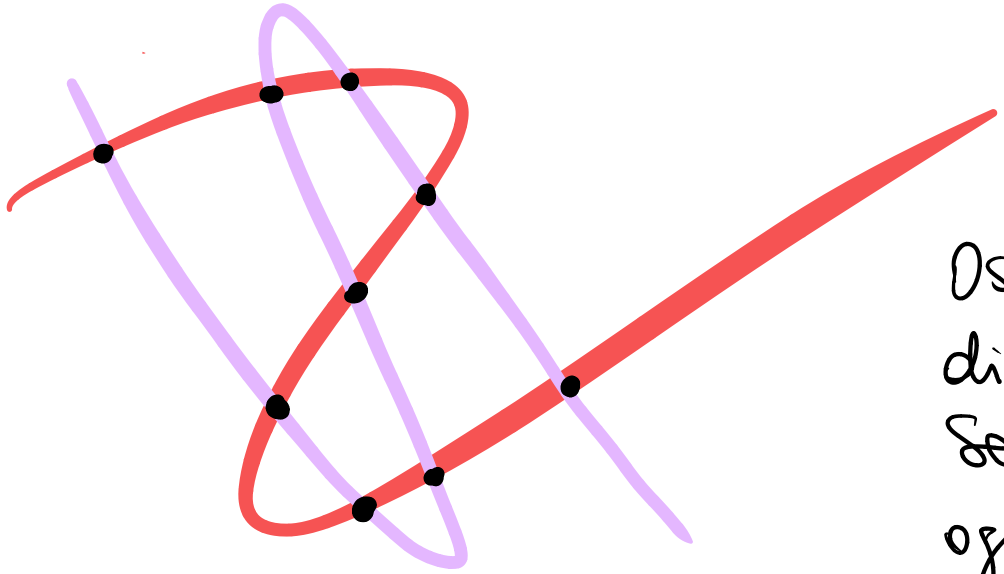
$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda) = \{Q_1,\dots,Q_9\} \\ \dim(\Lambda) = \underbrace{N(3,2)}_{9} - \underbrace{\operatorname{codim}(\Lambda)}_{9} = 0 \end{cases}$$

trovo un proiettivizzato di uno spazio vettoriale di $\dim = 1 \overset{\mathbb{P}}{\rightsquigarrow} \dim = 0$, $\Rightarrow$ è un **UNICO PUNTO** $\Rightarrow$

$\exists!$ CUBICA PIANA PER 9 PUNTI GENERICI

Cor: $\exists!$ CURVA PIANA DI $\deg = d$ che passa per $\dfrac{d(d+3)}{2}$ punti generici.

Esempio: $d=3$, $n=2$, fisso 9 punti $Q_1,\dots,Q_9$ definiti come L'INTERSEZ. DI DUE CUBICHE DATE F_0 e F_1



9 punti per Bézout

$\Rightarrow$ 9 PUNTI DEFINITI COSÌ NON SONO IN POSIZ. GENERALE

$$\Rightarrow \begin{cases} Bs(\Lambda) = \{Q_1,\dots,Q_9\} \\ \dim(\Lambda) = \underbrace{N(3,2)}_{9} - \underbrace{\operatorname{codim}(\Lambda)}_{8} = 1 \end{cases}$$

D: "Quanto sono generici" 9 punti definiti così?

Osserviamo che $\Lambda \ni Z_p(F_0)$, $\Lambda \ni Z_p(F_1)$ quindi $\dim(\Lambda) \geq 1$.

Se F_0, F_1 sono IRRIDUCIBILI allora ogni altra curva che passa per questi 9 punti deve appartenere al fascio generato da F_0, F_1

$\Rightarrow \Lambda = \mathbb{P}(\operatorname{Span}(F_0, F_1))$

$\Rightarrow q = \dim(\Lambda) = 1 \Rightarrow \operatorname{codim}(\Lambda) = 8$ ANZICHÉ 9!

TEOREMA (CASTELNUOVO) $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{P}^2$ $(n=2)$
DISTINTI

$$d \geq r-1 \Rightarrow Q_1, \dots, Q_r \text{ in POSIZIONE GENERALE}$$

Dim.: fisso d, induzione su r.
Se $r=1$ ✓

Assumiamo vero per $r-1$ e dimostriamo per r. IL TEOREMA VALE PER S_i PER INDUZIONE

Prendiamo $\{Q_1, \dots, Q_r\}$ $S_i := \{Q_1, \dots, \hat{Q}_i, \dots Q_r\}$ $|S_i| = r-1$

$$\Lambda_i := \{[F] \mid F(Q) = 0 \ \forall Q \in S_i\}$$

$$\Lambda := \{[F] \mid F(Q) = 0 \ \forall Q \in \{Q_1, \dots, Q_r\}\}$$

Ora $\dim(\Lambda) = N(d,2) - \underbrace{r}_{\text{CIOÈ SONO IN POSIZIONE GENERALE}} \Leftrightarrow \Lambda_i \supsetneq \Lambda \quad \forall i$

Quindi basta trovare una ipersuperficie piana di grado d che appartenga ad Λ_i ma non a Λ.

La costruiamo:

$r-1$ RETTE $\rightsquigarrow \deg = r-1$

UNA CURVA PIANA DI $\deg = d-(r-1) \geq 0$

$$\underset{\text{RIDUCIBILE}}{F} := \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} H_j\right)\cdot G \rightsquigarrow Z_p(F) \in \Lambda_i \setminus \Lambda \qquad \square$$