27 ottobre 2025, IAG (Inizio Capitolo n. 9)

# § SISTEMI LINEARI di IPERSUPERFICI PROIETTIVE

Idea: CONSIDERIAMO SOTTOSPAZI PROIETT LINEARI di INTERESSE $\subset$ FAMIGLIE di IPERSUPERFICI PROIETTIVE

(1 equazione)
(codim = 1)

OGGETTI DEGENERI

TESSUTI di ......

FASCI di RETTE o di CONICHE PIANE

RETI di RETTE o di CONICHE PIANE

**Q.:** Cosa parametrizza $(Z_p(F), F)$ di grado $d \geq 1$ ?

ASSUMIAMO F RIDOTTO

**R.:** Ricordiamo Lemma di Study, come corollario abbiamo che

**OSS.** se F, G poli omogenei non costanti ridotti irriducibili $\in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ (stesso d), allora

$$Z_p(F) = Z_p(G) \Longleftrightarrow F = G \cdot \text{costante}$$

(★)

PROIETTIVIZZARE TIENE CONTO DELLA POSSIBILE MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

Quindi $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$ PARAMETRIZZA tutti i SUPPORTI di IPERSUPERFICI RIDOTTE, ma

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d) \cong \mathbb{P}^{N(d,n)}, \qquad N(d,n) = ?$$

**LEMMA** $N(d,n) = \binom{n+d}{n} - 1$

Dim: $N(d,n) = \#\left\{ x_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \mid \sum_{j=0}^{n} i_j = d \right\} - 1$

Quindi non ci rimane che dimostrare che ci sono esattamente $\binom{n+d}{n}$ monomi di grado $d$ in $n+1$ indeterminate.

Si usa il cosiddetto argomento **STARS and BARS**

$\star$ $|$

C'è una biezione tra vettori di esponenti $(i_0, \dots, i_n) : \sum i_j = d$ e sequenze di $n+d$ **SIMBOLI** di cui $d$ **STELLE** $\star$ e $n$ **BARRE** $|$

Esempio: $x_0^3 x_1^1 x_2^2 \longleftrightarrow \vec{i} = (3,1,2) \longleftrightarrow \star\star\star|\star|\star\star$

$n=2, d=6$



Ci sono $\binom{n+d}{n}$ modi di scegliere $n$ simboli (che diventano barre) tra $n+d$ simboli totali (e negli altri ci mettiamo $\star$). $\square$

## Esempi:

IPERPIANI HANNO $d=1$

① $\{\text{Iperpiani proiettivi}\} \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_1) \cong \mathbb{P}^{N(1,n)} = \mathbb{P}^n$

② $\{\text{rette proiettive in } \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_1) \cong \mathbb{P}^2$

$\{\text{coniche proiettive in } \mathbb{P}^2\} \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_2) \cong \mathbb{P}^5$

$\{\text{cubiche} \quad '' \quad '' \quad ''\} \cong \mathbb{P}^9$

In generale grado $d$ in $\mathbb{P}^2$ dà $\mathbb{P}^{N(d,2)-1} = \mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1} = \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$

$\frac{(d+2)(d+1)-2}{2}$

Idea: generalizziamo la nozione di fascio di rette/iperpiani/coniche.

**Esempio:** Siano $H_1$, $H_2$ PIANI VETTORIALI in $\mathbb{K}^3$, generano un fascio di piani di equazione

$$\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{K}}\underbrace{(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2)}_{\text{eq. di } H_1}+\underbrace{\mu}_{\in\mathbb{K}}\underbrace{(b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2)}_{\text{eq. di } H_2}=0$$

al variare degli scalari $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Osserviamo che $(\lambda,\mu)$ e $(\lambda\alpha,\mu\alpha)$ $\mathbb{K}\ni\alpha\neq 0$ danno la stessa equazione $\Rightarrow \left[(\mu,\lambda)\in\mathbb{K}^2 \rightsquigarrow (\mu:\lambda)\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\right]$

Quindi lo spazio che parametrizza questo fascio è:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2,\ b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2)\right)$$

PER IL $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ DEI COEFFICIENTI

**Def: [SISTEMA LINEARE]** Un SISTEMA LINEARE $\Lambda$ di $\dim(\Lambda) = q \geq 0$ di ipersuperfici proiettive di grado $d \geq 1$ è un sottospazio lineare proiettivo

$$\Lambda \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d) \cong \mathbb{P}^{\binom{d+n}{n}-1}$$

LUOGO DI IPERSUPERFICI DEFINITE DA QUALCHE PROPRIETÀ DI INTERESSE

In particolare $\exists\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ tale che $\Lambda = \mathbb{P}(\mathcal{U})$, $\dim(\mathcal{U}) = q+1$.

sottospazio vettoriale

**Esempi:**

$q=0 \Rightarrow \Lambda$ è un punto

$q=1 \Rightarrow \Lambda$ è un fascio (pencil)

$q=2 \Rightarrow \Lambda$ è una rete (net)

$q=3 \Rightarrow \Lambda$ è un tessuto (web)

**Esempio:** $\Sigma \subseteq \underbrace{\mathbb{P}(K[x_0, x_1, x_2]_2)}_{\text{CONICHE PIANE}} \cong \mathbb{P}^5$

$\downarrow$

DEFINITO dalla PROPRIETÀ che una CONICA PIANA sia **DEGENERE**

Recall una conica piana proiettiva è degenere $\Leftrightarrow$ la sua matrice simmetrica associata è degenere

$$F(x_0, x_1, x_2) := a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{sg(\sigma)} a_{0,\sigma(0)} \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = 0}_{\text{ZERI di un POLINOMIO OMOGENEO nelle VARIABILI } a_{ij} \text{ DI GRADO } 3}$$

$\rightarrow$ É UNA CUBICA

**Esempio:** $\Lambda \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_2) \cong \mathbb{P}^5$ $\quad [\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}]$

$\Lambda$ ← DEFINITO dalla PROPRIETÀ che appartenga ad un fascio di coniche dato.
(è una retta proiettiva)

Ora vogliamo considerare $\Pi$: LE **CONICHE del FASCIO DEGENERI**

Allora

$$\Pi = \Sigma \cap \Lambda$$

← LUOGO DI OGGETTI GEOMETRICI che soddisfano PROPRIETÀ 1 **E** PROPRIETÀ 2 CORRISPONDE **ALL'INTERSEZIONE** dei due luoghi, e le sue equazioni si ottengono **METTENDO A SISTEMA** le equazioni di entrambi.

Due casi:

① Se $\Lambda \subset \Sigma$ (tutte le coniche del fascio sono degeneri) ← ENTRAMBE LE CONICHE CHE GENERANO SONO DEGENERI

$\Rightarrow \Pi = \Lambda$

② Se $\Lambda \not\subset \Sigma$ allora abbiamo tre sottocasi perché

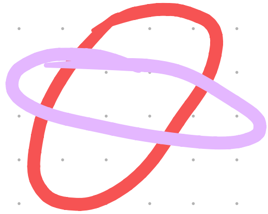
$$\sum_{Q \in \Lambda \cap \Sigma} \underbrace{I_Q(\Lambda, \Sigma)}_{\in \mathbb{Z}_{\geq 0}} = 1 \cdot 3 = 3$$

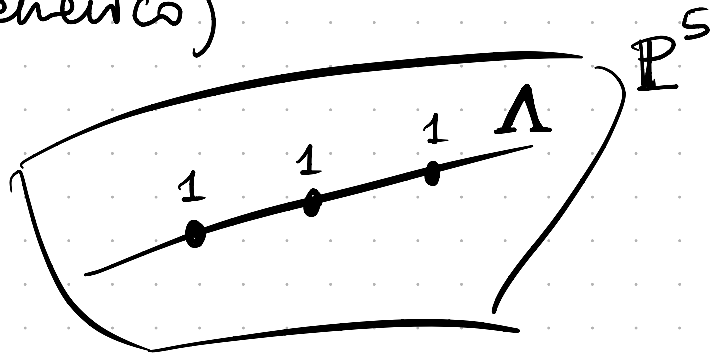
Quindi ci sono 3 modi di partizionare il numero 3.

2.1. 3 punti: $I_{Q_i}(\Lambda,\Sigma)=1 \quad i=1,2,3.$

corrisponde a **3 CONICHE DEGENERI DISTINTE**

(il fascio è generico)

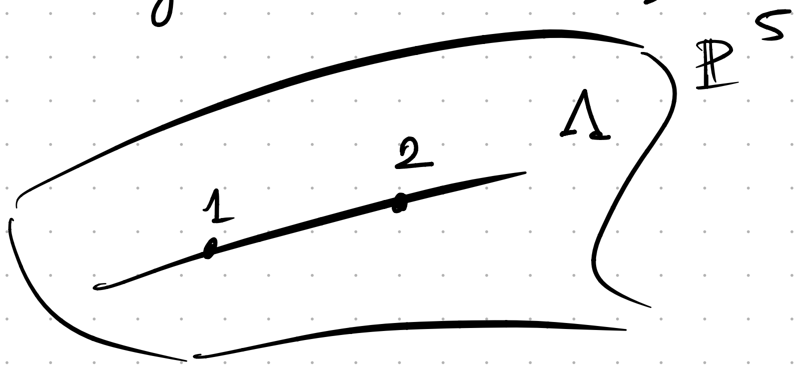





2.2. 2 punti: $I_{Q_1}(\Lambda,\Sigma)=1, \quad I_{Q_2}(\Lambda,\Sigma)=2$

corrisponde a **2 CONICHE DEGENERI DISTINTE**

(fascio tangente, bitangente, osculatore)



(2.3) 1 punto: $I_Q(\Lambda, \Sigma) = 3$

corrisponde a **1 CONICA DEGENERE** (fascio iperosculatore)