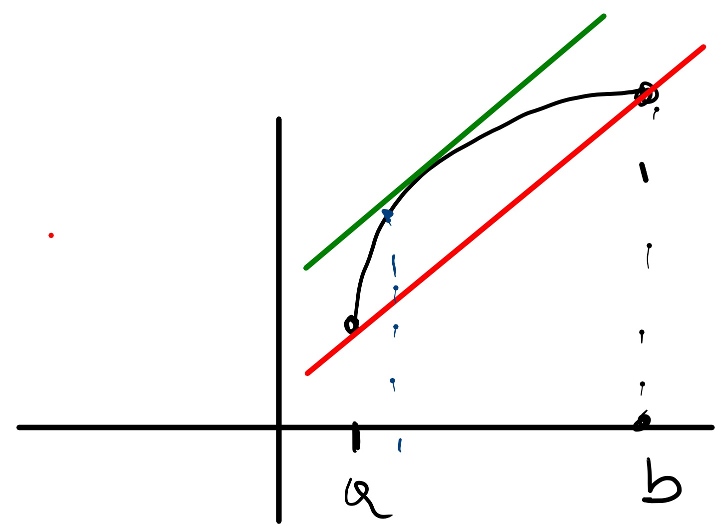
30 ottobre

Teor (Lagrange)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e $f'(x)$ definita in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Osservazione Nel caso particolare di Rolle in cui ovvero $f(b) = f(a) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

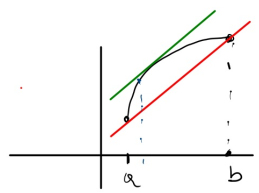
Quindi Lagrange generalizza Rolle.

Teor (Lagrange)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e $f'(x)$ definita in (a,b).

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Osservazione Nel

Dim Utilizzeremo Rolle. Aggiustiamo la funzione $f(x)$ nel seguente modo:

$$g(x) = f(x) - \alpha\,(x-a)$$

in modo tale che g soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle:

1) $f \in C^0([a,b]) \Rightarrow g \in C^0([a,b])$

2) $g'(x) = f'(x) - \alpha \qquad \forall x \in (a,b)$

3) vogliamo $g(b) = g(a)$. Questa richiesta produce una equazione di incognita α.

$$g(b) = g(a) \iff$$

$$f(b) - \alpha(b-a) = f(a) \iff f(b) - f(a) = \alpha(b-a)$$

$$\iff \boxed{\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Conclusione: la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

soddisfa le ipotesi del teor. di Rolle.

Allora per Rolle $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$0 = g'(c)$$

$$g'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)'$$

$$= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(x-a)'}_{1}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall x \in (a,b)$$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

Osservazioni. Vale il seguente corollario

<u>Corollario</u> Sia $f \in C^0([a,b])$ e derivabile in (a,b). Allora sono equivalenti le seguenti due proposizioni

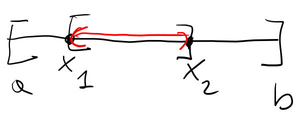
1) $f \equiv c$ (f è una funzione costante)

2) $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$

<u>Dim</u> $1 \Rightarrow 2$ segue dalla definizione di derivata: cioè se $f \equiv c$ sappiamo che $(c)'=0 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$. Supponiamo $f \in C^0([a,b])$ e che $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$. Verifichiamo che f è una funzione costante.
Si tratta di dimostrare che $\forall \; x_1 < x_2$ di punti in $[a,b]$ si ha

$f(x_1)=f(x_2)$.



$f \in C^0([a,b]) \Rightarrow f \in C^0([x_1,x_2])$

f derivabile in $(a,b) \Rightarrow f$ derivabile in $(x_1,x_2) \subseteq$
$\subseteq (a,b)$

Per Lagrange $\exists \; c \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Per ipotesi è vera la 2) cioè

$f'(x)=0 \quad \forall \; x \in (a,b)$

$$\Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}=0$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

Abbiamo dimostrato che $\forall \; x_1 < x_2$ in $[a,b]$ si ha $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f$ è costante.

Corollario (Significato geometrico del segno di $f'(x)$)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e $f'(x)$ definita in (a,b).

1) Allora se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) in (a,b) si ha che f è crescente (decrescente)

2) Se $f'(x) > 0$ (< 0) in (a,b) si ha che f è strettamente crescente (decrescente)

Dim 1) Si tratta di dimostrare che $\boxed{\forall\, x_1 < x_2}$ in $[a,b]$ si ha $\boxed{f(x_1) \leq f(x_2).}$ Per Lagrange $\exists\, c \in (x_1, x_2) \subseteq (a,b)$ t.c.

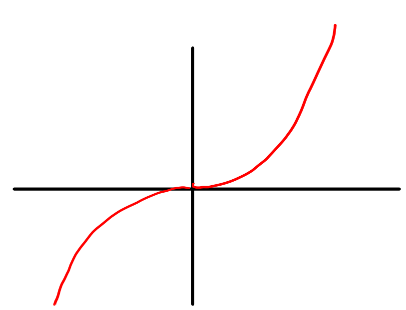
$$0 \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

Esempio $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$f'(0) = 0$.

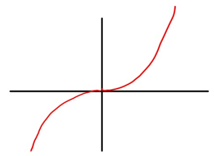


Come dimostreremo che $f(x)$ è strettamente crescente cioè che $\forall\, x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$.

Esempio $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2 \geq 0$

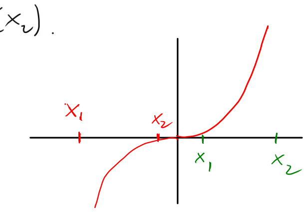
$f'(0)=0$.



Come dimostriamo che $f(x)$ è strettamente crescente cioè che $\forall\ x_1<x_2$ si ha $f(x_1)<f(x_2)$.

Ci sono tre casi

1) $x_1 < x_2 \leq 0$
2) $0 \leq x_1 < x_2$
3) $x_1 < 0 \quad x_2$



Nel caso 1) $x_1<x_2\leq 0$ so che $f'(x)=3x^2>0 \ \forall$
$x \in (x_1,x_2) \subseteq (-\infty,0) \Rightarrow x<0 \Rightarrow 3x^2>0$

$\Rightarrow$ per il Corollario $\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

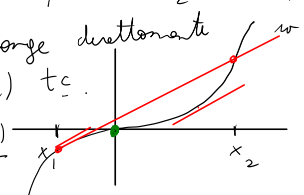
Il caso 2) è simile

Nel caso 3) $\quad x_1<0<x_2 \qquad f'(x)=3x^2$

Se io applico Lagrange direttamente so che $\exists\ c\in(x_1,x_2)$ t.c.

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}$$

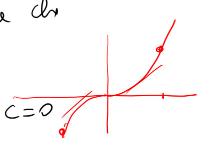
$= 3c^2$



ma questo non prova che

$f(x_2)-f(x_1)>0$

perché potrebbe essere $c=0$

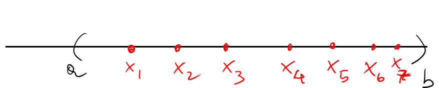


Tuttavia risulta ancora $f(x_1)<f(x_2)$ perché so che da $x_1<0$ siamo nel caso 1) e possiamo concludere che $f(x_1)<f(0)$ e $0<x_2$ siamo nel caso 2) e possiamo concludere che $f(0)<f(x_2)$. In conclusione

$$f(x_1)<f(0)<f(x_2) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

se $x_1<0<x_2$

Esercizio Sia I un intervallo, $X \subset I$ con card $X<+\infty$. Supponiamo che $f\in C^0(I)$ sia tale che $f'(x)>0 \ \forall\ x\notin X$.
Allora f è strettamente crescente in I.



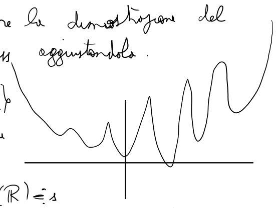
Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Dimostrare che $\exists\ L \in \overline{\mathbb{R}}$ ed
una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = L$.

Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$,
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L_\pm$ $\qquad L_\pm \in \overline{\mathbb{R}}$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < \min\{L_+, L_-\}$

Allora f ammette un punto di minimo assoluto x_m in $\mathbb{R}$.

Proviamo a seguire la dimostrazione del teorema di Weierstrass aggiustandola.



$\cancel{s} = f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Esiste una ~~successione~~ $\inf\{y_n\}$ in $f(\mathbb{R})$
t.c. $\lim_{n \to +\infty} y_n = \inf f(\mathbb{R}) =: s$

Resta definita una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ t.c.
$y_n = f(x_n) \quad \forall n$.

$\{x_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}$, so che
$\exists\ \bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con
$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

Notare che $\boxed{\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to +\infty} y_{n_k} = s}$

Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x} \Rightarrow$ per la continuità di f in $\bar{x}$ $\boxed{\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})}$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = s = \inf f(\mathbb{R}) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

(cioè $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{x}$ pt di min assoluto

ora devo dimostrare $\bar{x} \in \mathbb{R}$

Supponiamo per assurdo che $\bar{x} = +\infty$.
Suppongo per ipotesi che esiste
$x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < \lim_{x \to +\infty} f(x)$

So che $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = s = \inf f(\mathbb{R}) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq f(x_0) < \lim_{x \to +\infty} f(x)$
$L_+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \ L_+$

$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x} = +\infty$

$L_+ = s < f(x_0) < L_+ \Rightarrow L_+ < L_+$ assurdo.

non può essere $\bar{x} = +\infty$

Esercizio Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$
t.c. $\sup X = +\infty$ e supponiamo che
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione in X con $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ allora
$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.