

Esercizi V settimana Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacchi
A.A. 2025/2026

1. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $c_n = n(n^2 + 5)$ è un multiplo di 6. Si calcoli, qualora esista, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{6c_n}$.

[ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DICEMBRE 2021]

2. Si mostri che la successione

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

($n \geq 1$) risulta limitata.

Si calcoli inoltre se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Stabilire infine se la relazione

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ se e solo se } \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - b_n| = 0$$

è o meno una relazione di equivalenza.

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO LUGLIO 2021]

3. Rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale, si consideri il punto dello spazio $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane $A = (0, 1, 0)$.

Stabilire se A si trova all'interno o all'esterno della sfera S di centro $C = (1, 1, -1)$ e raggio 3.

Verificato che $B = (2, 3, 1)$ appartiene a S , determinare l'equazione cartesiana del piano tangente a S passante per B .

[HINT: IL PIANO TANGENTE A UNA SFERA IN UN PUNTO È ORTOGONALE AL RAGGIO DELLA SFERA PASSANTE PER TALE PUNTO]

Mostrare poi che se $P_n = (n, -n, -1)$, allora

$$d_{\mathbb{R}^3}^2(P_n, C) > 4n + 5$$

per ogni $n > 2$.

Se C' è la proiezione di C sul piano xy , trovare

- i) le coordinate polari del punto C' ;
- ii) l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C' e passante per l'origine;
- iii) il raggio di $\mathcal{C}$.

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO FEBBRAIO 2023]

4. In un riferimento cartesiano ortogonale, si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio r e centro l'origine e sia $V_0 := (r, 0)$ un vertice del poligono regolare $\mathcal{P}_n$ di n lati inscritto in $\mathcal{C}$ (con $n \geq 3$).

Si scrivano le coordinate degli altri vertici $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ di $\mathcal{P}_n$ e si mostri che

1) la lunghezza di ogni lato l_n di $\mathcal{P}_n$ misura $2r \sin \frac{\pi}{n}$;

2) la distanza di ogni lato l_n di $\mathcal{P}_n$ dall'origine misura $r \cos \frac{\pi}{n}$.

Detto p_n e A_n le misure rispettivamente del perimetro e dell'area di $\mathcal{P}_n$, se ne richiede una scrittura esplicita.

Si calcolino infine, se esistono, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

[ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DICEMBRE 2021]

5. Si trovi un esempio di successione di numeri reali a termini positivi, convergente a 2 ma non monotóna.

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO AUTUNNALE 2022]

6. Si calcolino, se esistono,

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}]$$

[ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DICEMBRE 2021]

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO FEBBRAIO 2023]

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n(n-1)} - \frac{n^2}{n+1} \right)$$

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO GIUGNO 2024]

7. Mostrare che la successione di termine generale $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ risulta

a) positiva

b) decrescente.

SENZA CALCOLARLO, cosa si deduce del limite della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$? Giustificare la risposta.

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO GENNAIO 2024]

8. La successione di termine generale $a_n = 1 - 1/n + \cos(1/n)$ risulta

a) monotóna crescente e limitata superiormente, per cui si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \dots$

b) monotóna crescente e illimitata superiormente, per cui si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \dots$

c) periodica per cui non esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

d) limitata e non monotóna, ma il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \dots$

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO GENNAIO 2024]

9. Sia $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione della somma dei primi n multipli di 6. Si mostri che $s_n = 3n(n+1)$. Si trovi il valore mediano dei dati

$$\{s_3 - 3s_1, 2s_2 + s_1, s_1 + s_3, s_3 - s_2 + s_1\}.$$

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL' APPELLO GIUGNO 2024]