Lezione 19 - 30/10/2025

# Funzione esponenziale e funzione logaritmo

Sia $a > 0$ $(a \in \mathbb{R},\ a \in ]0,+\infty[)$

fisso $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$

abbiamo

- $\forall n,\ a^n > 0, \qquad a^1 = a$
- $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \qquad a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$
- $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \qquad (a^{n_1})^{n_2} = a^{n_1 \cdot n_2}$
- $1 < a,\ n_1 < n_2 \Rightarrow a^{n_1} < a^{n_2}$
- $0 < a < 1,\ n_1 < n_2 \Rightarrow a^{n_1} > a^{n_2}$

$(*)$

fissiamo $m \in \mathbb{Z}$

$$a^m = \begin{cases} a^m & \text{se } m > 0 \text{ (come caso precedente)} \\ 1 & \text{se } m = 0 \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \frac{1}{a^{-m}} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{-m \text{ volte}}$$

con questa definizione continua a valere le prop $(*)$

sia ora $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$a^q$ dipende solo da $q$ e non dalla $(m,n)$ nel senso
$q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$

$$2^{3/2} = \sqrt[2]{2^3}$$

$$2^{3/2} = 2^{6/4}$$

$$\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[4]{2^6}$$

anche con questa definizione valgono le proprietà $(*)$

si ha

- $\forall q \in \mathbb{Q}, \quad a^q > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a$
- $a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$
- $(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$
- $a > 1, \quad q_1 < q_2 \Rightarrow a^{q_1} < a^{q_2}$
- $0 < a < 1, \quad q_1 < q_2 \Rightarrow a^{q_1} > a^{q_2}$

**Problema:** prendo $x \in \mathbb{R}$, come posso definire $a^x$ ?

Esempio $\qquad 2^{\sqrt{2}}$

idea: $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots\ldots$

costruisco una successione in $\mathbb{Q}$ che converge crescendo a $\sqrt{2}$

$$1, \quad 1,4 = \tfrac{14}{10}, \quad 1,41 = \tfrac{141}{100}, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad 1,41421, \ldots$$

$$2^1, \quad 2^{14/10} = \sqrt[10]{2^{14}}, \quad \sqrt[100]{2^{141}}, \quad \sqrt[1000]{2^{1414}}, \quad \sqrt[10000]{2^{14142}} \ldots$$

ho costruito una successione in $\mathbb{R}$ che è crescente e anche limitata

$1, \quad 1{,}4 = \frac{14}{10}, \quad 1{,}41 = \frac{141}{100}, \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142, \quad 1{,}41421, \dots$

$2^1 \quad 2^{14/10} = \sqrt[10]{2^{14}} \quad \sqrt[100]{2^{141}} \quad \sqrt[1000]{2^{1414}}, \quad \sqrt[10000]{2^{14142}} \quad \dots$

ho costruito una successione in $\mathbb{R}$
che è crescente e anche limitata

perché?

$1, 1{,}4, 1{,}41, \dots \quad < 2$

$2, 2^{1{,}4}, 2^{1{,}41}, \dots \quad < 2^2 = 4$

la successione $\left(2^{q_n}\right)_n$ dove $q_n = 1{,}4142\dots$

è crescente e limitata

Allora $\exists \lim_n 2^{q_n} = 2^x$

un ultimo problema: si fa vedere che $2^x$ dipende da $x$ e non dalla successione $(q_n)_n$

**Teorema** Sia $x \in \mathbb{R}$, sia $a \in ]0,+\infty[$
Sia $(q_n)_n$ una successione in $\mathbb{Q}$
tale che $\forall n,\ q_n < q_{n+1}$ e $\lim_n q_n = x$
(esiste sempre una successione che ha queste proprietà?)
sì perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

definisco $a^x = \lim_n a^{q_n}$

il valore $a^x$ dipende solo da $x$ e non dalla successione $(q_n)_n$

<u>osservazione</u> sia $a > 0$, $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{a} = 1$

$$\boxed{\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1}$$

utilizzando questo risultato si può provare che
se $(r_n)_n$ è una successione in $\mathbb{Q}$
tale che $\lim_n r_n = 0$ allora $\boxed{\lim_n a^{r_n} = 1}$

<u>conclusione</u>.
se fisso $a > 0$ resta definita una funzione

$$\exp_a : \mathbb{R} \to ]0,+\infty[$$
$$x \longmapsto \exp_a(x) = a^x$$

funzione esponenziale di base $a$

<u>proprietà</u>

- $\forall x,\ a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
- $\forall x_1, x_2 \quad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
- $\forall x_1, x_2 \quad \left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$

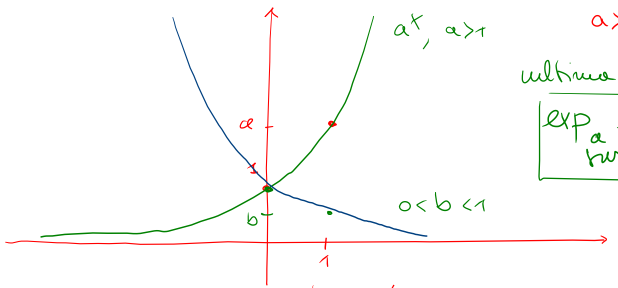
- $1<a$, $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$
- $0<a<1$, $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$

si prova anche che

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } a\in\,]0,1[ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \qquad \text{se } x_0\in\mathbb{R}$$

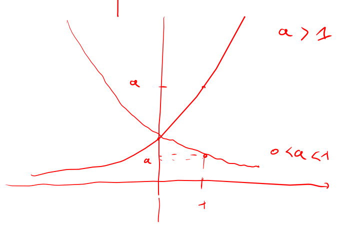
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } a\in\,]0,1[ \end{cases}$$

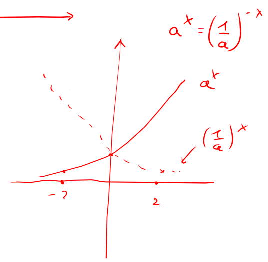



$a>1$

ultima proprietà

$\boxed{exp_a \text{ è suriettiva}}$




oss. se $a>0$, $a\neq 1$ la funz. $exp_a$ è biiettiva (suriettiva e strettamente monotona) e quindi è invertibile.

$\boxed{0<a, \ a\neq 1}$

def. $(exp_a)^{-1}: \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$
$\quad \| $
$\quad lg_a \qquad y \longmapsto lg_a y$ logaritmo in base $a$

proprietà

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad lg_a(a^x) = x$

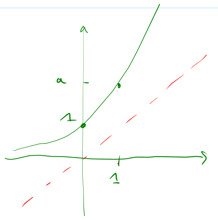
$\forall y\in\,]0,+\infty[$, $\quad a^{lg_a y} = y$

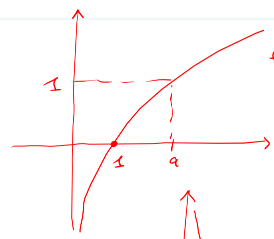
"$lg_a y$ è l'esponente da dare ad $a$ per ottenere $y$"

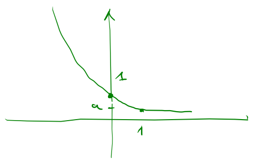
- $lg_a 1 = 0$, $\quad lg_a a = 1$
- $y_1, y_2 \in\,]0,+\infty[$, $\quad lg_a y_1 + lg_a y_2 = lg_a y_1 y_2$
- $y\in\,]0,+\infty[$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad lg_a y^x = x\, lg_a y$
- $a>1$, $y_1<y_2$ $\quad lg_a y_1 < lg_a y_2$
- $0<a<1$, $y_1<y_2$ $\quad lg_a y_1 > lg_a y_2$
- $\lim_{y\to 0^+} lg_a y = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ -\infty, & a>1 \end{cases}$, $\quad \lim_{y\to y_0} lg_a y = lg_a y_0$, $\quad \lim_{y\to+\infty} lg_a y = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$

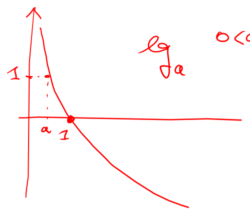
• $0<a<1$, $y_1<y_2$ $\quad \log_a y_1 > \log_a y_2$

• $\lim\limits_{y\to 0^+} \log_a y = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ -\infty, & a>1 \end{cases}$, $\quad \lim\limits_{y\to y_0} \log_a y = \log_a y_0$, $\quad \lim\limits_{y\to +\infty} \log_a y = \begin{cases} -\infty & 0<a<1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$








formula per il cambio di base nei logaritmi

$a,b>0$, $a,b\neq 1$

$y>0$

$$\boxed{\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}}$$

lg ↑ senza base $\quad$ exp ↓ base

la base è il numero e

Limiti notevoli

Abbiamo visto che $\boxed{\lim\limits_{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$

voglio calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

se $\boxed{n \leq x < n+1}$

$\Downarrow$

$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}$

$\Downarrow$

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $\quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \to 1$, $\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} e$

$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$

$x\to+\infty$ è come mandare $n\to+\infty$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \xleftrightarrow[\text{sono uguali}]{x=-y} \boxed{\lim\limits_{y\to+\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}}$

$$\lim\limits_{y\to+\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$\lim (1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$

Esercizio $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^x}{x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1+1-e^x}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$\frac{e^x-1}{x} \to 1$

$\downarrow e \qquad \downarrow 1$

$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e}$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to+\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$

$\frac{1}{x}=y$

$\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to-\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$

$\boxed{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

$x\to 0$

$\lg(1+x) \to \lg 1 = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x}$ $\quad \frac{0}{0}$

limite della composta

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \lg(1+x) = \lim_{x\to 0} \lg\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lg e = 1$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$x\to 0 \quad e^x \to e^0 = 1$

$e^x-1 \to 0$

chiamo $e^x-1 = y$

$e^x = 1+y$

$x = \lg(1+y)$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

$\lim_{x\to \pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Esercizio $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^x}{x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1+1-e^x}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$\to 1$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - e^{x}}{x} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - e^{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = -1$$

$$\frac{e^{x}-1}{x} \to 1$$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}$$

se $f(x) \to 0$

allora

$$\lim \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

$$x \longmapsto f(x)$$

$$\overset{\shortparallel}{y} \longmapsto \frac{e^{y} - 1}{y}$$