**Teorema**: (teorema di dimensione per soluzioni di sistemi lineari omogenei)

sia $A \in M_{m,n}(K)$; sia

$$W := \{ s \in K^n : A \cdot s = 0 \}$$

ovvero $W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo definito da $A$; notiamo che $W \subseteq K^n$ e che $W$ è un sottospazio vettoriale; vale

$$\dim W = n - rg(A)$$

**Dim**: seguirà dalla teoria delle applicazioni lineari.

**Lemma**: sia $V$ uno spazio vettoriale su $K$, siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e sia $U_1 := span(v_1, \dots, v_n)$; sia $v \in V$ e definiamo $U_2 = span(v_1, \dots, v_n, v)$; allora $U_1 \subseteq U_2$

**Dim**: sia $u \in U_1$, allora $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$; allora $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0 \cdot v$ e quindi $u \in span(v_1, \dots, v_n, v)$. □

**Lemma**: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$; sia $s \in K^n$ con $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ dove $s_1, \dots, s_n \in K$; vale che

$$s \text{ è soluzione di } AX = b \text{ (ovvero, } As = b)$$

$$\Updownarrow$$

$$b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$$

(ovvero le componenti di una soluzioni sono coefficienti di una combinazione lineare delle colonne di $A$ che restituisce il vettore dei termini noti $b$)

**Dim**: la dimostrazione segue dallo scrivere esplicitamente il prodotto $A \cdot s$ e notare che esso è uguale a $s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$

**Teorema**: (teorema di Rouchè - Capelli)

sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$, allora

il sistema lineare $AX = b$ è compatibile
(ovvero, esiste almeno una sua soluzione)

$$\Updownarrow$$

$$rg(A) = rg(A|b)$$

in tal caso, ovvero se il sistema è compatibile, allora la generica sua soluzione dipende da $n - rg(A)$ parametri liberi.

**Dim**: cominciamo con il dimostrare la parte relativa alla compatibilità:

"$\Downarrow$" supponiamo che il sistema $AX = b$ sia compatibile; vogliamo dimostrare che $rg(A) = rg(A|b)$; per ipotesi esiste $s \in K^n$ tale che $A \cdot s = b$ (ovvero, $s$ è soluzione del sistema); per il lemma precedente, se $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, allora vale che $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$, ovvero $b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$;

dimostriamo ora che

$$span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

"$\subseteq$" questo contenimento segue dal lemma precedente scegliendo $U_1 = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, $U_2 = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$

"$\supseteq$" sia $u \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$ e dimostriamo che vale $u \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$; per ipotesi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$ tali che $u = \lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} + \lambda \cdot b$; d'altro canto, nella nostra ipotesi sappiamo che $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$ quindi

$$u = \lambda_1 \cdot A^{(1)} + \dots + \lambda_n \cdot A^{(n)} + \lambda \cdot (s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)})$$

$$= (\lambda_1 + \lambda \cdot s_1) \cdot A^{(1)} + \dots + (\lambda_n + \lambda \cdot s_n) \cdot A^{(n)}$$

ovvero $u$ è combinazione lineare di $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, e quindi $u \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.

ora abbiamo dunque dimostrato che

$$span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

pertanto

$$\underbrace{\dim(span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))}_{rg(A)} = \underbrace{\dim(span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))}_{rg(A|b)}$$

"$\Uparrow$" supponiamo che $rg(A) = rg(A|b)$, e dimostriamo che il sistema $AX = b$ è compatibile, il che è equivalente, per il lemma precedente, a dimostrare che $b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$; per ipotesi vale che, se definiamo

$$U_1 = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \quad e \quad U_2 = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

allora $\dim U_1 = \dim U_2$; d'altro canto, per il lemma precedente vale che $U_1 \subseteq U_2$; abbiamo dunque due sottospazi vettoriali, uno contenuto nell'altro, della stessa dimensione; per le proprietà della dimensione devono quindi essere $U_1 = U_2$, ovvero

$$span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

ora, $b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$ e quindi $b \in span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ e questo dimostra che $AX = b$ è compatibile (perché vale che $b = s_1 \cdot A^{(1)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$ e dunque il vettore $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $AX = b$)

Con ciò abbiamo concluso la prima parte dell'enunciato; supponiamo ora che $AX = b$ sia compatibile, ovvero che esista una sua soluzione; chiamiamo $\tilde{s}$ una tale soluzione ($\tilde{s} \in K^n$); per il teorema di struttura dei sistemi lineari arbitrari, vale che l'insieme delle soluzioni di $AX = b$ è

$$\{ \tilde{s} + s_0 : s_0 \text{ è soluzione di } AX = 0 \}$$

se definiamo

$$W = \{ s \in K^n : s \text{ è soluzione di } AX = 0 \}$$

allora l'insieme delle soluzioni di $AX = b$ si scrive

$$\{ \tilde{s} + s_0 : s_0 \in W \}$$

per il teorema precedente vale che $\dim W = n - rg(A)$; se scriviamo $k := n - rg(A)$, allora abbiamo che $W$ ammette una base $\mathcal{B}$ con $k$ elementi, quindi $\mathcal{B} = \{ \omega_1, \dots, \omega_k \}$; ciò vuol dire che tutti e soli gli elementi $s_0$ di $W$ sono i vettori del tipo $\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_k \omega_k$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$

ciò significa che se $s_0 \in W$, allora

$$s_0 = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_k \omega_k \quad \text{con } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$$

e quindi la generica soluzione di $AX = b$ è della forma

$$s = \tilde{s} + \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_k \omega_k$$

pertanto essa dipende da $k$ parametri liberi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ □.