# §. LO SPAZIO AFFINE $\mathbb{A}^3(K)$

**SETTING:**
- $V := K^3$ vettoriale su $K$ con $\dim(V) = 3$
- $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(K)$ affine su $V$
- $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $V$
- $O :=$ ORIGINE di $\mathbb{A}$ (= ORIGINE DI $V$ IN QUESTO CASO)

$\Big]$ RIFERIMENTO AFFINE di $\mathbb{A}$.

**SOTTOSPAZI AFFINI DEL PIANO AFFINE:**

- $\dim = 3$: $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$ solo lo spazio affine stesso.
- $\dim = 2$: $\pi \subseteq \mathbb{A}$ ci sono infiniti piani affini in $\mathbb{A}$
- $\dim = 1$: $r \subseteq \mathbb{A}$ ci sono infinite rette affini in $\mathbb{A}$.
- $\dim = 0$: $P \in \mathbb{A}$ ci sono infiniti punti affini in $\mathbb{A}$.

## §. Un PIANO con giacitura data passante per un punto dato

$$W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \nu_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\\ \nu_2\end{pmatrix}\right) \qquad Q := \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$$

Allora il piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3(K)$ passante per $Q$ con giacitura $W$ è:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 \\ y = y_0 + t_1\mu_1 + t_2\mu_2 \\ z = z_0 + t_1\nu_1 + t_2\nu_2 \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE DEL PIANO $\pi$

$t_1, t_2 \in K$

Come prima sia un generico punto di $\mathbb{A}^3(K)$ $P := \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. Allora

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}, \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \mu_1\\ \nu_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \mu_2\\ \nu_2\end{pmatrix} \text{ LINEARM. DIP.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x - x_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ y - y_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ z - z_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} = 0$$

PER ESEMPIO TRAMITE LAPLACE sulla PRIMA COLONNA

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2) - (y - y_0)(\lambda_1\nu_2 - \nu_1\lambda_2) + (z - z_0)(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) = 0$$

EQ. CARTESIANA del piano $\pi$ passante per $Q$ con giacitura $W$

## §. Un PIANO passante per 3 punti dati

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Allora il piano $\pi \subseteq \mathbb{A}^3(K)$ passante per $P_0, P_1, P_2$ è dato dal metodo precedente semplicemente prendendo $W := \operatorname{Span}(\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_2P_0})$:

AD ESEMPIO MA SI POTEVA FARE IN MODI DIVERSI

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t_1(y_1 - y_0) + t_2(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + t_2(z_2 - z_0) \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE del PIANO $\pi$
$t_1, t_2 \in K$

e allo stesso modo si ottiene

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

EQ. CARTESIANE del PIANO $\pi$

## §. Una RETTA con giacitura data passante per un punto data

$$W := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\right) \qquad Q := \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}$$

Allora la retta r di giacitura W passante per Q è:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t\cdot\lambda \\ y = y_0 + t\cdot\mu \\ z = z_0 + t\cdot\nu \end{cases}$$

EQ. PARAMETRICHE della retta r

$t \in K$

Come prima consideriamo un punto generico $P = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in A^3(K)$

$P \in r \iff \overrightarrow{PQ}$ è proporzionale a $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}\cdot t' = \begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}$

⚠ NON È FACILE ESPRIMERE LE CARTESIANE COME det IN QUESTO CASO.

Però: $\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}}_{=A \in M_{3\times 1}(K)} \cdot t' = \begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}$ ← VETTORE b dei TERMINI NOTI

$t'$: INCOGNITE

Assumiamo che abbia soluz.
Allora per Rouché-Capelli
$\underset{\substack{\| \\ 1}}{\mathrm{rank}(A)} = \mathrm{rank}(A|b)$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\begin{pmatrix}\lambda & x-x_0\\ \mu & y-y_0\\ \nu & z-z_0\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$ RIDUCIAMO IN FORMA SCALA con GAUß

Chiaramente può succedere durante la riduzione che uno dei $\lambda, \mu, \nu$ sia zero [MA NON TUTTI E TRE], e allora dobbiamo scambiare due righe.

Assumiamo senza perdita di generalità che $\lambda \neq 0$ (altrimenti scambiamo righe)

$$\Rightarrow \underset{\text{RIDOTTI}}{(\tilde{A} \mid \tilde{b})} = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & x - x_0 \\ 0 & (y-y_0) - \frac{\mu}{\lambda}(x-x_0) \\ 0 & (z-z_0) - \frac{\nu}{\lambda}(x-x_0) \end{array} \right)$$

IL SISTEMA DEVE AVERE SOLUZIONI ALLORA DOBBIAMO IMPORRE CHE QUESTI DUE QUI SIANO ZERO (ROUCHÉ - CAPELLI)

$$\Rightarrow r: \begin{cases} \lambda(y-y_0) - \mu(x-x_0) = 0 \\ \lambda(z-z_0) - \nu(x-x_0) = 0 \end{cases}$$

EQ. CARTESIANE della retta $r$

Q: Ma come mai una RETTA in equazioni CARTESIANE, in $\mathbb{A}^3(K)$, è definita da DUE EQUAZIONI, e invece un PIANO in $\mathbb{A}^3(K)$ DA UNA SOLA EQUAZIONE?!

R: Ogni equazione (lin. indip.) RIDUCE di uno la DIMENSIONE.

$$\dim(\mathbb{A}^3(K)) - \dim(r) = 3 - 1 = 2 \text{ EQUAZIONI}$$

## § Una RETTA r passante per 2 punti dati:

$Q := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ Una retta $r \supseteq \overrightarrow{QP}$ deve avere giacitura $W = \mathrm{Span}(\overrightarrow{QP})$

$\Rightarrow W = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{pmatrix} \right)$. A questo punto possiamo dimenticare uno dei due punti e procedere esattamente come prima per l'equazione di una retta passante per un punto dato con giacitura data.

# $\boxed{\text{PROP}}$ [POSIZIONI RECIPROCHE di due PIANI AFFINI in $\mathbb{A}^3(K)$]

$$\begin{cases} \pi : ax+by+cz=d \\ \pi' : a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} i).\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \pi \,//\, \pi' \\ \quad i.a).\ \text{Se } \pi \,//\, \pi' \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap \pi' = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \\ \pi \cap \pi' \neq \emptyset \Leftrightarrow \pi = \pi' \end{cases} \\ ii).\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \pi \cap \pi' = r \end{array}\right.$$

RETTA DATA IN EQ. **CARTESIANE** DAL SISTEMA DELLE EQ. CARTESIANE DEI DUE PIANI

PARTIAMO CON DUE **PIANI IN $\mathbb{A}^3(K)$** DATE TRAMITE LORO **EQUAZIONI CARTESIANE**

IN ALTRE PAROLE: SE **NON SONO PARALLELE** ALLORA SONO AUTOMATICAMENTE **INCIDENTI**, OVVERO: IN 3 DIMENSIONI NON C'È ABBASTANZA **DIMENSIONE** AFFINCHÉ DUE PIANI SIANO **SGHEMBI**

L'UNICO ALTRO CASO NON TRATTATO È DATO DA $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0$, MA QUESTO IMPLICA $a=b=c=a'=b'=c'=0$ E QUINDI ENTRAMBI I PIANI SAREBBERO DEGENERI e RIDOTTI AD UN PUNTO.

**PROP** [POSIZIONI RECIPROCHE di un PIANO e di una RETTA in $\mathbb{A}^3(K)$]

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad \pi: a''x+b''y+c''z=d''$$

PARTIAMO CON UN **PIANO** ED UNA **RETTA** in $\mathbb{A}^3(K)$ DATE TRAMITE LORO **EQUAZIONI CARTESIANE**

$\Rightarrow$

i). $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}=0 \iff \pi // r$

i.a). Se $\pi // r \Rightarrow \begin{cases} \pi \cap r = \emptyset \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3 \\ \pi \cap r \neq \emptyset \iff r \subsetneq \pi \end{cases}$

ii). $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \neq 0 \iff \pi \cap r = Q$ PUNTO DATO IN EQ. **CARTESIANE** DAL SISTEMA DELLE EQ. CARTESIANE DEL PIANO E DELLA RETTA

IN ALTRE PAROLE: SE **NON SONO PARALLELI** ALLORA SONO AUTOMATICAMENTE **INCIDENTI**, OVVERO: IN 3 DIMENSIONI NON C'È ABBASTANZA **DIMENSIONE** AFFINCHÉ **RETTA** E **PIANO** SIANO **SGHEMBI**

Dim.: [della PROP sui due PIANI, l'altra è analoga]

i). Se $W, W'$ sono le giaciture dei due piani affini, quindi con $\dim(W) = \dim(W') = 2$, allora come nella scorsa dimostrazione $\pi // \pi' \Leftrightarrow W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$ ma essendo della stessa dimensione abbiamo che

$$\pi // \pi' \Leftrightarrow W = W'$$

La condizione $W = W'$ può anche essere scritta come il fatto che $\dim(W \cap W') = 2$ (per esempio per la **FORMULA di GRASSMANN**). Ora usiamo il fatto che **L'INTERSEZIONE DI SPAZI** è descritta da sistemi lineari prodotti mettendo a sistema le loro relative equazioni cartesiane. Quindi

$$W \cap W' : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

OVVIAMENTE PER ROUCHÉ-CAPELLI IL SISTEMA OMOGENEO (CHE HA SEMPRE SOLUZIONI) HA DIMENSIONE DELLE SOLUZIONI UGUALE A

$$3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

IMPONGO PERCHÉ $W = W'$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1.$$

i. a). Di nuovo, $\pi \cap \pi' = \emptyset$ è la stessa cosa che dire, in termini dei sistemi lineari che il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

NON È COMPATIBILE

$\Updownarrow$ ROUCHÉ-CAPELLI

L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \Leftarrow 1 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \neq \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

SOTTO LE IPOTESI CHE $\pi // \pi'$

ii). Se $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

$\Downarrow$ ROUCHÉ-CAPELLI i)

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

È COMPATIBILE

$\xLeftarrow{\text{ROUCHÉ CAPELLI ii)}}$ S = SPAZIO SOLUZ. HA DIM $= n - \operatorname{rank}(A)$ $\Rightarrow$ DIM $= 3 - 2 = 1$

$\Leftarrow$ $\pi \cap \pi' = r$ RETTA AFFINE

$\square$

**PROP** [POSIZIONI RECIPROCHE di due RETTE in $\mathbb{A}^3(K)$]

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \qquad r': \begin{cases} ex+fy+gz=h \\ e'x+f'y+g'z=h' \end{cases} \Rightarrow$$

i). $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 2 \iff r \parallel r'$

i.a). Se $r \parallel r' \Rightarrow \begin{cases} r \cap r' = \emptyset \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 3 \\ r \cap r' \neq \emptyset \iff r = r' \end{cases}$

ii). $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} \neq 2 \iff r \nparallel r'$

ii.a). Se $r \nparallel r' \Rightarrow \begin{cases} r \cap r' = \emptyset \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 4 \\ r \cap r' \neq \emptyset \iff r \cap r' = Q \end{cases}$

PARTIAMO CON DUE **RETTE** in **$\mathbb{A}^3(K)$** DATE TRAMITE LORO **EQUAZIONI CARTESIANE**

PUNTO DATO IN **EQ. CARTESIANE** DAL SISTEMA di 4 EQ$^{ni}$ CARTESIANE delle 2 RETTE

IN ALTRE PAROLE: SE **NON SONO PARALLELE** ALLORA SONO **INCIDENTI** OPPURE **SGHEMBE**, OVVERO: IN 3 DIMENSIONI C'E' ABBASTANZA **DIMENSIONE** AFFINCHE' **RETTE** SIANO **SGHEMBE**