Foglio 1

1) $X_2 = \{1, 2\}$

topologia banale: APERTI: $\emptyset, X_2$

verifichiamo che soddisfa le condizioni nella definizione di topologia:

1) $\emptyset \in \tau_{ban}$, $X_2 \in \tau_{ban}$

2) unione arbitraria di aperti è aperta:

$\emptyset \cup X_2 = X_2 \in \tau_{ban}$

$X_2 \cup X_2 = X_2 \in \tau_{ban}$

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \tau_{ban}$

3) intersezione finita di elementi di τ sta in τ:

$\emptyset \cap X_2 = \emptyset \in \tau_{ban}$

$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_{ban}$

$X_2 \cap X_2 = X_2 \in \tau_{ban}$

topologia discreta: APERTI: $\emptyset, X_2, \{1\}, \{2\}$

soddisfa la definizione?

1) $\emptyset, X_2 \in \tau_{dis}$

2) unione arbitraria di aperti sta in τ_{dis}:

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \tau_{dis}$

$\emptyset \cup \{1\} = \{1\} \in \tau_{dis}$

$\phi \cup \{2\} = \{2\} \in \tau_{dis}$

$\phi \cup X_2 = X_2 \in \tau_{dis}$

$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} = X_2 \in \tau_{dis}$

$X_2 \cup \{1\} = X_2 \in \tau_{dis}$

$\phi \cup \{1\} \cup \{2\} = X_2 \in \tau_{dis}$

3) intersezioni finite di elementi di τ_{dis} stanno in τ_{dis}:

$\phi \cap$ (qualsiasi cosa) $= \phi \in \tau_{dis}$

$X_2 \cap \{1\} = \{1\} \in \tau_{dis}$

$X_2 \cap \{1\} \cap \{2\} = \phi \in \tau_{dis}$

$\{1\} \cap \{2\} = \phi \in \tau_{dis}$

topologia cofinita / Zariski : APERTI: $\phi, X_2, X_2 \setminus \{1\},$

$X_2 \setminus \{2\}, X_2 \setminus \{1,2\} = \phi$

chi è? è la topologia tale che ha come aperti $\phi, X_2, X_2 \setminus \{1\} = \{2\}, X_2 \setminus \{2\} = \{1\}$ $\Rightarrow$ è la topologia discreta!

Vogliamo ora individuare altre possibili topologie.

SUGGERIMENTO: per farci venire un'idea buona dobbiamo concentrarci sulla struttura dell'insieme e su cosa ci dice.

Ho un insieme formato da due elementi, nella topologia banale ho scartato entrambi i singoletti topologia banale ho escluso entrambi i singoletti

mentre nella discreta ho incluso entrambi i singoletti.

La domanda naturale è: ho una topologia includendo solo uno dei due singoletti come aperto?

$\tau_1 = \{ \phi, \{1\}, \{1,2\}\}$

verifica la definizione?

1) $\phi, X_2 \in \tau_1$

2) unione arbitraria di elementi sta in τ_1:

$\phi \cup \phi = \phi \in \tau_1$

$\phi \cup \{1\} = \{1\} \in \tau_1$

$\phi \cup X_2 = X_2 \in \tau_1$

$\phi \cup X_2 \cup \{1\} = X_2 \in \tau_1$

3) intersezione finita di elementi in τ_1 sta in τ_1:

$X_2 \cap \{1\} = \{1\} \in \tau_1$

$X_2 \cap \phi = \phi \in \tau_1$

$X_2 \cap \{1\} \cap \phi = \phi \in \tau_1$

la stessa cosa funziona per $\tau_2 = \{ \phi, \{2\}, X_2\}$

2) $X_3 = \{1,2,3\}$

⚠ se ho due esercizi "simili" uno dietro l'altro

concentratevi su queste domande:

- cosa è cambiato nella struttura dello spazio?
- cosa invece è rimasto simile?
- come posso utilizzare la struttura di X per trarne le informazioni che mi servono?

in generale, in topologia è importante soffermarsi su come ci appare lo spazio in cui lavoriamo e sulle sue proprietà

topologia banale: APERTI: $\emptyset, X_3$

controllo la definizione

1) $\emptyset, X_3 \in \tau$ ban

2) unione arbitraria di elementi di τ ban sta in τ ban:

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \tau$ ban

$\emptyset \cup X_3 = X_3 \in \tau$ ban

$X_3 \cup X_3 = X_3 \in \tau$ ban

3) intersezione finita di elementi di τ ban sta in τ ban:

$\emptyset \cap X_3 = \emptyset \in \tau$ ban

$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$ ban

$X_3 \cap X_3 = X_3 \in \tau$ ban

topologia discreta: APERTI: $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},$
$\{2,3\}, \{1,3\}, X_3$

controllo la definizione

1) $\phi, X_3 \in \tau$ dis

2) unione arbitraria di elementi di τ dis sta in τ dis:

$\phi \cup \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\} \in \tau$ dis

$\phi \cup \{2\} \cup \{3,1\} = X_3 \in \tau$ dis

$\phi \cup \{3,1\} \cup \{1\} = \{3,1\} \in \tau$ dis

$X_3 \cup$ (qualsiasi cosa) $= X_3 \in \tau$ dis

3) intersezione finita di elementi in τ dis sta ancora in τ dis:

$\{1,3\} \cap \{2\} = \phi \in \tau$ dis

$\{1,2\} \cap \{1\} = \{1\} \in \tau$ dis

$\phi \cap$ (qualsiasi cosa) $= \phi \in \tau$ dis

topologia cofinita / Zariski: APERTI: $\phi, X_3, X_3 \setminus \{1\},$
$X_3 \setminus \{2\}, X_3 \setminus \{3\}, X_3 \setminus \{1,2\}, X_3 \setminus \{1,3\}, X_3 \setminus \{3,2\},$
$X_3 \setminus X_3 = \phi$

chi è? è la topologia discreta

altre topologie? ci sono 29 topologie possibili su X_3.

le altre topologie sono tutte le topologie miste

$\tau_1 = \{ \phi, \{1\}, \{1,2,3\}\}$ e simili

$\tau_2 = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$ e simili

$\tau_3 = \{ \phi, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ e simili

$\tau_4 = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ e simili

$\tau_5 = \{ \phi, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$ e simili

$\tau_6 = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, X_3\}$ e simili

↳ devo aggiungere anche le intersezioni nel caso in cui aggiungo delle coppie

si può dimostrare che sono tutte topologie

3) $\mathcal{B} = \{ (a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$?

$\mathcal{B}$ <u>non</u> è una base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$

<u>controesempio</u>: considero l'aperto $(0,1)$ non è unione di elementi dell'insieme $\mathcal{B}$

è base per una topologia?

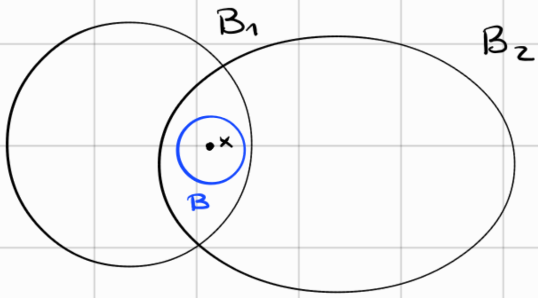
utilizzo la caratterizzazione delle basi di una topologia:

<u>Teorema</u>: Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\exists\, \tau_{\mathcal{B}}$ topologia su X t.c. $\mathcal{B}$ è base per $\tau_{\mathcal{B}}$ $\iff$ (1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ t.c.

$x \in B \subset B_1 \cap B_2$



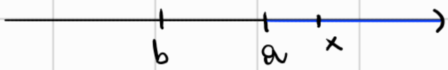
controlliamo che siano verificate (1) e (2):

1) $X = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a, +\infty)$

2) considero $B_1 = (a, +\infty)$, $B_2 = (b, +\infty)$

devo distinguere i casi:

- $a > b$:

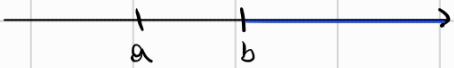


$B_1 \cap B_2 = (a, +\infty)$

$\Downarrow$ fisso $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow$ basta prendere

$B = (a, +\infty)$

- $a < b$:



$B_1 \cap B_2 = (b, +\infty)$

$\Downarrow$ fisso $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow$ basta prendere

$B = (b, +\infty)$

- $a = b$: $B = B_1 = B_2$

In conclusione ho che $\mathcal{B}$ è base per una topologia

con aperti $\bigcup_{i \in I} (a_i, +\infty)$, $a_i \in \mathbb{R}$, I insieme

di indici qualsiasi

4) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}, a<b \}$

è base per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

utilizzo la caratterizzazione delle basi.

Ho due passi da seguire nella dimostrazione:

(i) verifico che $\mathcal{B}$ sia una base per una topologia su $\mathbb{R}$

(ii) verifico che la topologia di cui è base $\mathcal{B}$ coincide con quella euclidea

topologia euclidea su $\mathbb{R}$: generata dagli aperti (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$

(i) utilizzo la proposizione e vado a verificare che $\mathcal{B}$ soddisfa le ipotesi (1) e (2):

1) $\mathbb{R} = \bigcup_{(a,b)\in \mathcal{B}} (a,b)$

- $\bigcup_{(a,b)\in\mathcal{B}} (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ okay

- $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{(a,b)\in\mathcal{B}} (a,b)$

fisso $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ so per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ che

$\exists$ $a,b \in \mathbb{Q}$ tali che $a > x > b$ $\Rightarrow$ $\exists$ $(a,b) \in \mathcal{B}$

t.c. $x \in (a,b) \Rightarrow x \in \bigcup_{(a,b)\in\mathcal{B}} (a,b)$

2) considero ora $B_1 = (a_1, b_1)$, $B_2 = (a_2, b_2)$

e fisso $x \in B_1 \cap B_2$. Allora:

$$x \in (\underbrace{\max(a_1, a_2)}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{\min(b_1, b_2)}_{\in \mathbb{Q}}) \in \mathcal{B}$$

quindi esiste una topologia per cui $\mathcal{B}$ è base

(ii) verifichiamo che questa topologia coincide con quella euclidea

1) $\Downarrow$ voglio dimostrare che ogni intervallo aperto di $\mathbb{R}$ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$:

- fisso $a, b \in \mathbb{R}$ e considero (a,b) aperto nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$.
- per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ho che $\exists$ $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ successioni di numeri razionali $(a_n)_n \in \mathbb{Q}$, $(b_n)_n \in \mathbb{Q}$ che convergono rispettivamente ad a e a b

$$\Rightarrow (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

$(a_n, b_n) \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ ogni aperto della topologia euclidea di $\mathbb{R}$

è aperto nella topologia generata da $\mathcal{B}$

2) viceversa, voglio dimostrare che ogni aperto della topologia generata da $\mathcal{B}$ è aperto nella topologia euclidea

- fisso $(a,b) \in \mathcal{B}$, $a,b \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è aperto nella top. euclidea

5) $\mathcal{B} = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{Q}$ e $a<b \}$

utilizzo la caratterizzazione delle basi.

Ho tre passi da seguire nella dimostrazione:

(i) verifico che $\mathcal{B}$ sia una base per una topologia su $\mathbb{R}$

(ii) verifico che la topologia di cui è base $\mathcal{B}$ è strettamente più fine della topologia euclidea

(iii) controllo se la topologia di Sorgenfrey coincide con $\tau_{\mathcal{B}}$

(i) utilizzo la proposizione e vado a verificare che $\mathcal{B}$ soddisfa le ipotesi (1) e (2):

1) $\mathbb{R} = \bigcup_{[a,b) \in \mathcal{B}} [a,b)$

- $\bigcup_{[a,b) \in \mathcal{B}} [a,b) \subseteq \mathbb{R}$ okay

- $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{[a,b) \in \mathcal{B}} [a,b)$

fisso $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ so per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ che

$\exists\ a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $a > x > b$ $\Rightarrow$ $\exists\ [a,b) \in \mathcal{B}$

t.c. $x \in [a,b)$ $\Rightarrow$ $x \in \bigcup_{[a,b) \in \mathcal{B}} [a,b)$

2) considero ora $B_1 = [a_1, b_1)$, $B_2 = [a_2, b_2)$

e fisso $x \in B_1 \cap B_2$. Allora:

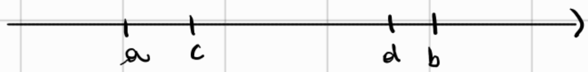
$$x \in [\underbrace{\max(a_1, a_2)}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{\min(b_1, b_2)}_{\in \mathbb{Q}}) \in \mathcal{B}$$

quindi esiste una topologia per cui $\mathcal{B}$ è base

(ii) verifichiamo che la topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ è strettamente più fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ ossia verifico che ogni aperto (a,b) nella topologia euclidea è aperto in $\tau_{\mathcal{B}}$

- fisso $a, b \in \mathbb{R}$ e considero (a,b) aperto.

  Allora: $$(a,b) = \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{Q} \\ a<c<d<b}} [c, d)$$



$\tau_{euc} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$

Tuttavia non tutti gli aperti di $\tau_{\mathcal{B}}$ possono essere scritti come unione di aperti della topologia euclidea di $\mathbb{R}$:

$[0,1)$ aperto in $\tau_{\mathcal{B}}$ ma non posso scriverlo come unione di aperti nella topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

(iii) topologia di Sorgenfrey : topologia generata dalla base $\mathcal{B}_\ell = \{ [a,b[\ : \ a<b \ , \ a,b \in \mathbb{R} \}$

1) fisso $a,b \in \mathbb{R}$, considero $[a,b[$. Allora

$$[a,b[\ = \bigcup_{c \in \mathbb{Q} \cap [a,b[} [c,b[$$

2) il viceversa è okay

allora le due topologie coincidono