Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 2

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia base per $(X, \mathcal{T})$. Per ogni $x \in X$ definiamo

$$\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{B}_x$ è base di intorni di x in X.

2) Dati sottospazi $A \subset Y \subset X$ dimostrare che A è chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists\, B \subset X$ chiuso in X t.c. $A = B \cap Y$.

3) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y aperto in X, dimostrare che Z aperto in $Y \Leftrightarrow Z$ aperto in X.

4) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y chiuso in X, dimostrare che Z chiuso in $Y \Leftrightarrow Z$ chiuso in X.

5) La famiglia degli intervalli chiusi e limitati di R è base per una topologia?

6) Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$. Dimostrare che

   (a) $\mathrm{Cl}_X A = \mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Fr}_X A$.
   (b) $\mathrm{Cl}_X A = A \cup \mathrm{Fr}_X A$.
   (c) $\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Fr}_X (X - A)$.
   (d) $X = \mathrm{Fr}_X A \cup \mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Ext}_X A$, e che questi tre sottoinsiemi sono a due a due disgiunti.

7) Calcolare $\mathrm{Fr}_R[0,1]$ e $\mathrm{Fr}_{R_\ell}[0,1]$.

8) Sia $Q \subset R$ l'insieme dei numeri razionali. Calcolare interno, frontiera e chiusura di Q in R.

9) Dimostrare che ogni punto della retta di Sorgenfrey R_ℓ ammette una base di intorni numerabile.

10) Dimostrare che ogni spazio topologico metrizzabile finito è discreto.

11) X_{cof} è metrizzabile?

Foglio 2

1) $\mathcal{B}$ base per (X, τ). $\forall x \in X$ definiamo la

$$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$$

Dimostrare che $\mathcal{B}_x$ è una base di intorni per x in X.

risposta:

ricordiamo la definizione di intorno e di base di intorni:

Def: X spazio topologico, $J \subset X$ intorno di $x \in X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$

Def: X spazio topologico, $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $x \in X$ è base di intorni di x se $\forall L \subset X$ intorno di x $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $J \subset L$.

Devo dimostrare che $\mathcal{B}_x$ è una base di intorni di x ossia che $\forall J \subset X$ intorno di x $\exists\, J \in \mathcal{B}_x$ tale che $J \subset L$.

- Fisso quindi $J \subset X$ intorno di x $\Rightarrow$ per definizione di intorno ho che $\exists\, U \subset X$ aperto di X tale che $x \in U \subset J$
- $\mathcal{B}$ base per la topologia $\Rightarrow$ $U = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_x \\ \text{opportuni}}} B \ni x$

in particolare, $\exists\, B \in \mathcal{B}_x$ tale che $x \in B \subseteq U \subset J$

e noto che $B \in \mathcal{B}_x$ quindi è l'elemento che cercavo che soddisfa la def. di base di intorni

$\Downarrow$

$\mathcal{B}_x$ è base di intorni di x.

$\square$

2) Siano $A \subset Y \subset X$ con A, Y sottoinsiemi di X, dimostrare che A chiuso in Y $\iff$ $\exists B \subset X$ chiuso in X tale che $A = B \cap Y$.

risposta:

mi ricordo la definizione di topologia indotta su Y da X:

$\tau_Y = \{ U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto} \}$

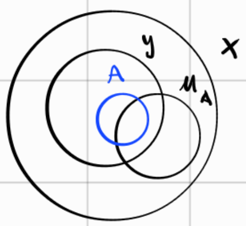
per svolgere l'esercizio utilizzo la definizione e vado ad esibire gli insiemi di cui ho bisogno ossia vado a costruire i chiusi / aperti che mi servono

$(\Rightarrow)$ A chiuso in Y, Y sottoinsieme di X dotato della topologia di sottospazio $\Rightarrow$ i chiusi in Y sono della forma $Y \setminus (U \cap Y)$ con $U \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $\exists U_A \subset X$ aperto tale che $A = Y \setminus (U_A \cap Y)$

$\Rightarrow A = Y \setminus (U_A \cap Y) = (Y \setminus U_A) \cup (Y \setminus Y) = Y \setminus U_A = Y \cap U_A^c =$

$= Y \cap (X \setminus U_A)$, $X \setminus U_A$ chiuso in X

$\Rightarrow B_A = X \setminus U_A$ chiuso in X



(sono arrivato ad esibire il chiuso che mi occorreva)

$(\Leftarrow)$ $\exists B \subset X$ chiuso in X tale che $A = B \cap Y$ $\Rightarrow$ A chiuso in Y

$Y \setminus A = Y \setminus (B \cap Y) = (Y \setminus B) \cup (Y \setminus Y) = Y \setminus B \cup \emptyset = Y \setminus B =$

$= Y \cap B^c = Y \cap (X \setminus B)$

$X \setminus B$ aperto in Y $\Rightarrow$ $Y \cap (X \setminus B)$ aperto in Y $\Rightarrow$ $Y \setminus A$ aperto in Y $\Rightarrow$ A chiuso in Y

$\square$

3) $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici con Y aperto in X.

Dimostrare che Z aperto in Y $\Leftrightarrow$ Z aperto in X.

risposta:

ricordo sempre la definizione di topologia indotta su Y da X

$\tau_Y = \{ U \cap Y \mid U \text{ aperto in } X \}$

$(\Rightarrow)$ Z aperto in Y $\Rightarrow$ $\exists\, U \subset X$ aperto in X tale che $Z = U \cap Y$ ma Y aperto in X $\Rightarrow$ Z è intersezione di due aperti in X $\Rightarrow$ Z aperto in X

$(\Leftarrow)$ Z aperto in X $\Rightarrow$ posso scrivere $Z = Y \cap Z$ poiché $Z \subset Y$ $\Rightarrow$ Z è intersezione di Y e di un aperto di X $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Z è aperto in Y (topologia indotta)

$\square$

4) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y chiuso in X, dimostrare che Z chiuso in Y $\Leftrightarrow$ Z chiuso in X.

risposta:

$(\Leftarrow)$ Z chiuso in X $\Rightarrow$ posso scrivere $Z = Y \cap Z$ ossia come intersezione di Y e di un chiuso in X $\Rightarrow$ Z chiuso in Y

($\Leftarrow$) Z chiuso in Y $\Rightarrow$ $\exists\, C \subset X$ chiuso in X tale che

$Z = Y \cap C$ e Y chiuso in X $\Rightarrow$ Z è intersezione di due

chiusi in X $\Rightarrow$ Z chiuso in X.

$\square$

5) la famiglia degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ è una base

per una topologia?

risposta:

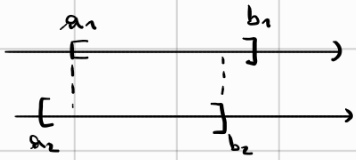
andiamo ad utilizzare la proposizione per controllare se

$\mathcal{B} = \{ [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ è una base per una topologia

1) $\bigcup_{a,b \in \mathbb{R}} [a,b] = \mathbb{R}$

2) fissati $B_1 = [a_1, b_1]$, $B_2 = [a_2, b_2]$ e fisso $x \in B_1 \cap B_2$

chi è $B_1 \cap B_2$?



$B_1 \cap B_2 = [\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}]$

ma cosa succede se $B_1 = [a, b]$, $B_2 = [b, c]$?

$B_1 \cap B_2 = \{b\}$ $\Rightarrow$ per $x = b$ $\nexists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $B \subset B_1 \cap B_2$, $x \in B$

$\Rightarrow$ non è una base per una topologia in $\mathbb{R}$

6) RICORDIAMO LE DEFINIZIONI DEGLI OPERATORI TOPOLOGICI PRINCIPALI:

Sia X uno spazio topologico dotato di una topologia τ,

Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di X.

$$\boxed{\mathrm{Int}_X\, A := \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto} \\ \text{in } X}} U}$$

$$\boxed{\mathrm{Cl}_X\, A := \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ chiuso} \\ \text{in } X}} C}$$

$$\boxed{\mathrm{Ext}_X\, A := \mathrm{Int}_X\,(X \setminus A)}$$

$$\boxed{\mathrm{Fr}_X\, A := (\mathrm{Cl}_X\, A) \cap (\mathrm{Cl}_X\,(X \setminus A))}$$

esempio: gli operatori topologici dipendono fortemente dallo spazio X in cui li stiamo calcolando

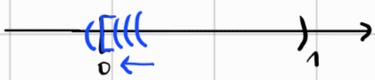
- $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\, [0,1[= \bigcup_{\substack{U \subset [0,1[\\ U \text{ aperto} \\ \text{in } \mathbb{R}}} U = (0,1)$

- $\mathrm{Int}_{[0,1]}\, [0,1[= \bigcup_{\substack{U \subset [0,1[\\ U \text{ aperto} \\ \text{in } [0,1]}} U = [0,1[$

chi sono gli aperti in $[0,1]$? $U = [0,1] \cap (a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

io sto considerando gli aperti contenuti in $[0,1[$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ quelli del tipo $U = [0,1] \cap \,]a,b[$, $a < b < 1$



$a \neq -\infty$

- $\text{Int}_{\mathbb{R}} \{0\} = \bigcup_{\substack{U \subset \{0\} \\ U \text{ aperto} \\ \text{in } \mathbb{R}}} U = \emptyset$

- $\text{Int}_{\mathbb{R}_\ell} [0,1] = \bigcup_{\substack{U \subset [0,1] \\ U \text{ aperto} \\ \text{in } \mathbb{R}_\ell}} U$

aperti in $\mathbb{R}_\ell$ hanno la forma $U = [a, b[$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$U \subset [0,1] \Rightarrow b \leq 1$ e $a \geq 0$

$\text{Int}_{\mathbb{R}_\ell} [0,1] = [0, 1[$

Recall: (1) $Cl_X A = X \setminus Ext_X A$

(2) $Fr_X A = Cl_X A - \text{Int}_X A$

(a) $Cl_X A = \text{Int}_X A \cup Fr_X A$

dim:

dalla condizione (1) del teorema so che $Cl_X A = X \setminus Ext_X A$

quindi posso spostare il focus al dimostrare che $X \setminus Ext_X A =$
$= \text{Int}_X A \cup Fr_X A$

($\supseteq$) sia $x \in \text{Int}_X A \cup Fr_X (A)$

- se $x \in Fr_X(A) \Rightarrow x \in Cl_X(A) \Rightarrow x \in X \setminus Ext_X (A)$

- se $x \in \text{Int}_X A \Rightarrow x \in A$ poiché $\text{Int}_X(A) \subseteq A$ e $A \subseteq Cl_X(A) \Rightarrow x \in Cl_X(A)$

alternativa: $x \in \text{Int}_X A \Rightarrow x \in \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto} \\ \text{in } X}} U \Rightarrow \exists\, U$ aperto in X, $U \subset A$ t.c. $x \in U$.

utilizzo la caratterizzazione della chiusura ossia $x \in Cl_X A$ sse

$\forall V$ intorno aperto di x in X si ha $V \cap A \neq \emptyset$.

Sia ora quindi V qualsiasi intorno aperto di x. Allora

- $U \cap V$ aperto perchè intersezione di aperti
- $x \in U \cap V$ perchè $x \in U \wedge x \in V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

$U \subset A \Rightarrow U \cap V \subseteq A \cap V \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset$ per ogni intorno aperto V di $x \Rightarrow x \in Cl_X A$

($\subseteq$) $Cl_X A \subseteq Int_X(A) \cup Fr_X(A)$

$Fr_X(A) = Cl_X(A) \setminus Int_X(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow Cl_X(A) \subseteq Int_X(A) \cup (Cl_X(A) \setminus Int_X(A)) =$

$= Int_X(A) \cup (Cl_X(A) \cap Int_X(A)^c) =$

$= Int_X(A) \cup Cl_X(A)$ okay $\square$

alternativa senza il teorema: usare la caratterizzazione

(b) $Cl_X A = A \cup Fr_X(A)$

dim:

($\subseteq$) $Cl_X A = Int_X A \cup Fr_X(A) \subseteq A \cup Fr_X(A)$

($\supseteq$) $A \cup Fr_X(A) \subseteq Cl_X A \cup Fr_X(A) = Cl_X(A) \cup (Cl_X(A) \setminus$

$\setminus Int_X(A)) \subseteq Cl_X(A)$

$(A \subseteq Cl_X(A))$

(c) $Fr_X(A) = Fr_X(X \setminus A)$

dim:

$\mathrm{Fr}_X(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus A)$

$\mathrm{Fr}_X(X \setminus A) = \mathrm{Cl}_X(X \setminus A) \cap \mathrm{Cl}_X(A)$

$\square$

(d) $X = \mathrm{Fr}_X(A) \cup \mathrm{Int}_X(A) \cup \mathrm{Ext}_X(A)$ e gli insiemi sono a due a due disgiunti

dim:

$\mathrm{Fr}_X(A) \cup \mathrm{Int}_X(A) \cup \mathrm{Ext}_X(A) = \mathrm{Fr}_X(A) \cup \mathrm{Int}_X(A) \cup \mathrm{Ext}_X(A) =$

$= \mathrm{Cl}_X(A) \cup \mathrm{Ext}_X(A) = (X \setminus \mathrm{Ext}_X A) \cup \mathrm{Ext}_X(A) = X$

$\square$

(7) $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}}[0,1] = (\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}[0,1]) \cap (\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus [0,1])) =$

$= (\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}[0,1]) \cap (\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}}(-\infty,0) \cup (1,+\infty)) =$

$= [0,1] \cap \left(\bigcap_{\substack{C \supset (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \\ C \text{ chiuso in } \mathbb{R}}} C \right) =$ (*)

C chiuso in $\mathbb{R}$ che contiene $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ è della forma

$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, $a \geq 0$, $b \leq 1$

$\bigcap_{\substack{C \supset (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \\ C \text{ chiuso in } \mathbb{R}}} C = (-\infty, 0] \cup [1,+\infty)$

(*) $= [0,1] \cap ((-\infty,0] \cup [1,+\infty)) = \{0,1\}$

(singoletti 0 e 1)

ho 2 modi per farlo:

1) $\text{Fr}_{\mathbb{R}_e}[0,1] = (\text{Cl}_{\mathbb{R}_e}[0,1]) \cap (\text{Cl}_{\mathbb{R}_e}(-\infty,0)\cup(1,+\infty))$

con la definizione

2) $\text{Fr}_{\mathbb{R}_e}[0,1] = \text{Cl}_{\mathbb{R}_e}[0,1] \setminus \text{Int}_{\mathbb{R}_e}[0,1] =$

$= \text{Cl}_{\mathbb{R}_e}[0,1] \setminus [0,1[$

$$\text{Cl}_{\mathbb{R}_e}[0,1] = \bigcap_{\substack{C \supset [0,1] \\ C \text{ chiuso in } \mathbb{R}_e}} C$$

C chiuso in $\mathbb{R}_e$ ha la forma $X \setminus [a,b[= (-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

quindi ho che chiusi del tipo $(-\infty,1)\cup[1,+\infty)$

contengono $[0,1]$ ma anche del tipo $(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

con $a>1$ e $b>a$

ma anche chiusi del tipo $(-\infty,-\varepsilon)\cup[0,+\infty)$

contengono $[0,1]$ ma anche insiemi del tipo $(a,1]$

con $a<0$ (domanda: qual è un altro tipo di chiuso in $\mathbb{R}_e$?)

↳ perché gli insiemi del tipo $(a,1]$ sono chiusi nella topologia di Sorgenfrey? Considero il complementare:

$\mathbb{R} \setminus (a,1] = (-\infty,a] \cup (1,+\infty)$

- $(1,+\infty)$ è aperto perché $(1,+\infty) = \bigcup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ x>1}} [x, x+\varepsilon[$

con $\varepsilon>0$ arbitrario quindi unione di aperti

- $(-\infty,a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n, a-\frac{1}{n})$ unione di aperti nella topologia di S.

$Cl_{\mathbb{R}_\ell}[0,1] = (0,1]$ domanda: $[0,1]$ è chiuso in $\mathbb{R}_\ell$?

$\Rightarrow \quad Fr_{\mathbb{R}_\ell}[0,1] = (0,1] \setminus [0,1[\; = (0,1] \cap (-\infty,0) \cup [1,+\infty) = \{1\}$

$Fr_{\mathbb{R}_\ell}[0,1]$ è chiuso in $\mathbb{R}_\ell$ quindi controllo che $\{1\}$ sia chiuso nella topologia di Sorgenfrey: $\{1\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}, 1\right]$

intersezione di chiusi in Sorgenfrey

(8) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ insieme dei razionali

- $Cl_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R} = \bigcap_{\substack{C \supset \mathbb{Q} \\ C \text{ chiuso in } \mathbb{R}}} C$
- $Int_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \emptyset$ ($\mathbb{Q}$ è un insieme discreto quindi $\forall x \in \mathbb{Q} \; \nexists U \subset \mathbb{Q}$ intorno aperto di x in $\mathbb{R}$)
- $Fr_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = (Cl_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}) \cap Cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

poiché $Cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcap_{\substack{C \supset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ C \text{ chiuso} \\ \text{in } \mathbb{R}}} C = \mathbb{R}$

$Fr_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = Cl_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \setminus Int_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

(9) Dimostrare che ogni punto della retta $\mathbb{R}_\ell$ di Sorgenfrey ammette una base di intorni numerabile

$\mathcal{J}$ base di intorni di $x \in \mathbb{R}_\ell$ fissato $=$ $\forall L \subset X$ intorno di x $\exists J \in \mathcal{J}$ t.c. $J \subset L$.

Considero $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \left[x, x+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow U_n$ intorno di x (aperto)

e $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è numerabile. Fisso ora V intorno di x e devo dim. che $\exists U_n$ t.c. $U_n \subset V$. Considero $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \overbrace{\left[x, x+\frac{1}{n}\right)}^{U_n} \subseteq [x, x+\varepsilon) \subseteq V$

($\exists \, \varepsilon > 0$ tale che valga per definizione di V intorno di x). $\square$

(10) Sia X spazio topologico metrizzabile tale che $|X| = n < +\infty$.
Allora X è discreto.

risposta:

X discreto $\iff$ i singoletti sono aperti ossia $\{x\}$ aperto

- X finito $\Rightarrow$ $\exists\, x_1, \dots, x_n$ tali che $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- X metrizzabile $\Rightarrow$ $\exists\, d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tau_X = \tau_d$

allora gli aperti nella topologia di X sono del tipo

$B_r(y) = \{x \in X \text{ t.c. } d(x,y) < r\}$

- da qui è immediato vedere che i singoletti sono aperti:

fisso $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$ e considero

$$\delta := \min \{ d(x_i, x_j) \text{ t.c. } x_j \in X,\ x_i \neq x_j \} \quad (*)$$

allora $B_{\delta/2}(x_i) = \{ x_j \in X \text{ t.c. } d(x_i, x_j) < \frac{\delta}{2} \} = \{x_i\}$

$\Rightarrow$ la topologia su X è discreta.

(*) Rmk: questo minimo esiste?

$\{ d(x_i, x_j) \text{ t.c. } x_j \in X,\ x_i \neq x_j \}$ è finito

non vuoto se $n \geq 2$

se $n = 1$, $X = \{x\}$ e il singoletto è aperto

$\square$

(11) X_{cof} è metrizzabile?

risposta:

Se $|X| = n < +\infty \Rightarrow \tau_{cof} = \tau_{dis}$ e ho che X_{dis} è metrizzabile.

Sia X un insieme infinito.

Suppongo p.a. che $\exists\ d : X \times X \to \mathbb{R}$ metrica tale che $\tau = \tau_d$.

Allora gli aperti della topologia cofinita coincidono con le palle aperte date dalla metrica ossia

$B_\varepsilon(x) = \{ y \in X : d(x,y) < \varepsilon \}$ deve essere aperta nella topologia cofinita cioè $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in X$ $X \setminus B_\varepsilon(x)$ è finito.

Considero quindi $x, y \in X$, $x \neq y$.

PROPRIETÀ SP. METRICI:

$\forall x, y \in X$, $x \neq y$ $\exists\ \delta > 0, \varepsilon > 0$ t.c. $B_\delta(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.

dim:

siano $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow d(x,y) = r > 0$.

considero quindi $\delta = \varepsilon = \frac{r}{3}$ e considero $B_\delta(x)$ e $B_\varepsilon(y)$.

P.a. assumo che $\exists\ z \in B_\delta(x) \cap B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(x,z) < \frac{r}{3}$ e $d(z,y) < \frac{r}{3}$

$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{2r}{3} < r$ ↯

supponendo quindi che X_{cof} metrizzabile ho che $\forall x, y \in X_{cof}$ $x \neq y \Rightarrow \exists\ \delta > 0, \varepsilon > 0$ t.c. $B_\delta(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$

e $B_\delta(x)$, $B_\varepsilon(y)$ aperti nella topologia cofinita ma ciò non è possibile perché intersezione di due aperti non vuoti nella topologia cofinita è sempre non vuota se lo spazio X è infinito.

↳ dim: considero $U \in \tau_{cof}$, $V \in \tau_{cof}$ aperti $\overline{\text{non vuoti}} \Rightarrow X \setminus U = F_1$ finito e $X \setminus V = F_2$ finito $\Rightarrow U = X \setminus F_1$, $V = X \setminus F_2$

p.a. $U \cap V = \emptyset$.

$U \cap V = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \cup F_2)$

$F_1 \cup F_2$ finito $\Rightarrow X \setminus (F_1 \cup F_2)$ cofinito $\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$ ↯

□