Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 4

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare che se $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ sono continue (risp. aperte), allora

$$\begin{gathered} f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \\ (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{gathered}$$

è continua (risp. aperta).

2) Dimostrare che se $A \subset X$ e $B \subset Y$ allora:

(a) $\operatorname{Cl}(A \times B) = \operatorname{Cl} A \times \operatorname{Cl} B$;

(b) $\operatorname{Int}(A \times B) = \operatorname{Int} A \times \operatorname{Int} B$;

(c) $\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times \operatorname{Cl} B) \cup (\operatorname{Cl} A \times \operatorname{Fr} B)$.

Dedurre quindi la "formula di Leibniz" per la frontiera: se A e B sono chiusi allora

$$\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times B) \cup (A \times \operatorname{Fr} B).$$

Esaminare in un disegno il caso particolare del quadrato $\operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^2}([0,1] \times [0,1])$.

3) Siano $A \subset X$ e $B \subset Y$ due chiusi. Dimostrare che $A \times B$ è chiuso in $X \times Y$.

4) Consideriamo una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ e sia $A_i \subset X_i$ chiuso in X_i $\forall\, i \in I$. Dimostrare che $\prod_{i \in I} A_i$ è chiuso in $\prod_{i \in I} X_i$.

5) Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ha la topologia banale.

6) Dimostrare che la seguente funzione è ben definita e continua:

$$\psi : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \psi([x_0, x_1, x_2]) = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Foglio 4

1) Dimostrare che se $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ e $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ continue (risp. aperte) allora $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ definita come $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ è continua (risp. aperta)

risposta:

continuità: utilizzo la proprietà fondamentale del prodotto topologico

considero $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ e considero le proiezioni

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1 \qquad , \qquad \pi_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 \qquad\qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_2$$

$$\Rightarrow \quad f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto \big(f_1(\pi_1(x_1,x_2)),\ f_2(\pi_2(x_1,x_2)) \big) =$$
$$= (f_1 \circ \pi_1 (x_1,x_2),\ f_2 \circ \pi_2 (x_1,x_2))$$

$\Rightarrow$ utilizzo la proprietà fondamentale del prodotto topologico

$f_1 \times f_2$ continua $\Leftrightarrow$ $\pi_1 \circ (f_1 \times f_2)$ continua e $\pi_2 \circ (f_1 \times f_2)$ continua

ma le componenti di $f_1 \times f_2$ sono continue perché composizione di funzioni continue $\Rightarrow$ $f_1 \times f_2$ continua

aperta: $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ aperta, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ aperta $\overset{?}{\Rightarrow}$

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \quad \text{aperta}$$

f_1 aperta $\Leftrightarrow$ $\forall\, U_1 \subseteq X_1$ aperto $f_1(U_1) = V_1$ aperto

f_2 aperta $\Leftrightarrow$ $\forall\, U_2 \subseteq X_2$ aperto $f_2(U_2) = V_2$ aperto

basta verificare che la mappa sia aperta su una base della topologia prodotto ossia su insiemi del tipo $\{ U_1 \times U_2 \mid U_1$ aperto in X_1 e U_2 aperto in $X_2 \}$

$$f_1 \times f_2 (U_1 \times U_2) = \underbrace{f_1(U_1)}_{\substack{\text{aperto} \\ \text{in } Y_1}} \times \underbrace{f_2(U_2)}_{\substack{\text{aperto} \\ \text{in } Y_2}} \quad \text{aperto in } Y_1 \times Y_2$$

2) Dimostrare che se $A \subset X$ e $B \subset Y$ allora:

(a) $Cl(A \times B) = Cl(A) \times Cl(B)$

risposta:

utilizzando la definizione di chiuso nella topologia prodotto scrivo chi è la chiusura di $A \times B$:

$$Cl_{X \times Y}(A \times B) = \bigcap_{\substack{C \supset A \times B \\ C \text{ chiuso}}} C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiuso nella} \\ \text{topologia prodotto}}}{=} \bigcap (X \times Y) \setminus U = (X \times Y) \setminus \Big(\bigcup_{\substack{U \text{ aperto} \\ U \subset A \times B}} U \Big)$$

$$= X \times Y \setminus \left(\bigcup U_i \times V_i \right) \overset{?}{=} (X \setminus \bigcup U_i) \times (Y \setminus \bigcup V_i)$$

NON VALE IN GENERALE!

Controesempio: $X = Y = \mathbb{R}$, $U_1 = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, $V_1 = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$

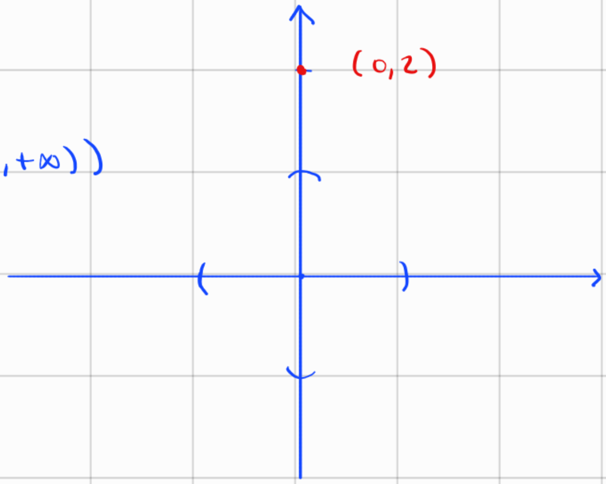
allora $U_1 \times V_1 = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus ((-1, 1) \times (-1, 1))$

$\mathbb{R} \setminus (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$\Rightarrow \quad (\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \times (\mathbb{R} \setminus (-1,1)) =$

$= ((-\infty,-1] \cup [1,+\infty)) \times ((-\infty,-1] \cup [1,+\infty))$



quindi $(x,y) \in (\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \times (\mathbb{R} \setminus (-1,1))$

se $x \leq -1$ oppure $x \geq 1$

e $y \leq -1$ oppure $x \geq 1$

$(0,2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (-1,1)^2$ ma $(0,2) \notin (\mathbb{R} \setminus (-1,1)) \times (\mathbb{R} \setminus (-1,1))$

svolgo l'esercizio utilizzando la caratterizzazione della chiusura:

$x \in Cl_X(A) \iff \forall U \subset X$ intorno aperto di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$.

$(\subseteq)$ $(x,y) \in Cl(A \times B) \Rightarrow \forall U$ intorno aperto di (x,y) ho che $U \cap (A \times B) \neq \emptyset$

$\exists$ V, Z in X e in Y tali che $U = V \times Z \Rightarrow (V \times Z) \cap (A \times B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ ogni aperto che contiene x interseca A

$Z \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ " " " y " B

$\Rightarrow$ $x \in Cl(A)$ e $y \in Cl(B) \Rightarrow (x,y) \in Cl(A) \times Cl(B)$

$\Rightarrow$ $(x,y) \in (V \times Z) \cap (A \times B) \Rightarrow x \in V \wedge x \in A \Rightarrow$

$y \in Z \wedge y \in B$

$\Rightarrow$ $V \cap A \neq \emptyset$

$Z \cap B \neq \emptyset$

$(\supseteq)$ $(x,y) \in Cl(A) \times Cl(B)$

devo mostrare che ogni aperto $U \times V \subseteq X \times Y$ che contiene (x,y) interseca $A \times B$ quindi fisso $U \times V$ tale che $(x,y) \in U \times V$

ho che $x \in Cl(A) \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

$y \in Cl(B) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset$

ho che $(U \cap A) \times (V \cap B) \subseteq (U \times V) \cap (A \times B)$ e non è vuoto $\Rightarrow$

$\Rightarrow (U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset \Rightarrow (x,y) \in Cl(A \times B)$

$\subseteq$ $(x,y) \in (U \cap A) \times (V \cap B) \Rightarrow x \in U \wedge x \in A$ $\Rightarrow$

$y \in V \wedge y \in B$

$\Rightarrow (x,y) \in U \times V \wedge (x,y) \in A \times B \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in (U \times V) \cap (A \times B)$

(b) $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$

risposta:

$Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$

$(\subseteq)$ $(x,y) \in Int_{X \times Y}(A \times B) \Rightarrow \exists\, U \subset X \times Y$ intorno aperto di (x,y)

t.c. $U \subset A \times B \Rightarrow$ siccome U intorno aperto $\exists\, U_i \subset A$ aperto

contenente x e $\exists\, V_i \subset B$ aperto contenente y t.c.

$U = U_i \times V_i \Rightarrow U_i \times V_i \subset A \times B$

$\Rightarrow U_i \subset A$ intorno aperto di $x \Rightarrow x \in Int(A)$

$V_i \subset B$ intorno aperto di $y \Rightarrow y \in Int(B)$

$\Rightarrow (x,y) \in Int(A) \times Int(B)$

$(\supseteq)$ $(x,y) \in Int_X(A) \times Int_Y(B)$

$x \in Int_X(A) \Rightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $U \subset A$

$y \in \mathrm{Int}_Y(B) \Rightarrow \exists\, V \subset Y$ intorno di y t.c. $V \subset B$

$\Rightarrow$ considero $U \times V \Rightarrow$ esso è tale che: • $U \times V \subset A \times B$

• $(x,y) \in U \times V$

ed è un intorno aperto di (x,y) per la definizione di topologia prodotto $\Rightarrow$ $(x,y) \in \mathrm{Int}_{X \times Y}(A \times B)$

(c) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cup (\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Fr}(B))$

risposta:

$\mathrm{Fr}(A \times B) = \mathrm{Cl}(A \times B) \setminus \mathrm{Int}(A \times B) = (\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \setminus (\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)) =$

$= (\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cap (\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B))^c =$

$\overset{(=)}{=} (\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cap [(X \setminus \mathrm{Int}(A)) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus \mathrm{Int}(B))] =$

$= [(\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cap (X \setminus \mathrm{Int}(A)) \times Y)] \cup [(\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cap$

$\cap (X \times (Y \setminus \mathrm{Int}(B)))] =$

$= (\mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Cl}(B)) \cup (\mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Fr}(B))$

se A e B sono chiusi $\Rightarrow A = \mathrm{Cl}(A)$, $B = \mathrm{Cl}(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times B) \cup (A \times \mathrm{Fr}(B))$

(=) in generale considero $C \times D$ e voglio provare l'uguaglianza insiemistica

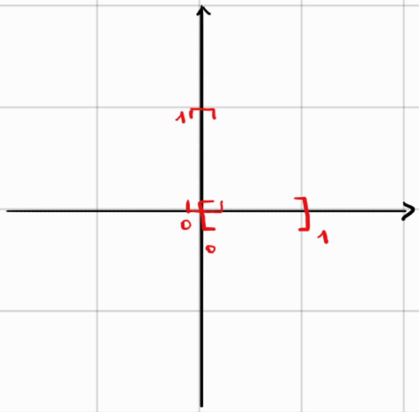
$(X \times Y) \setminus (C \times D) = [(X \setminus C) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus D)]$

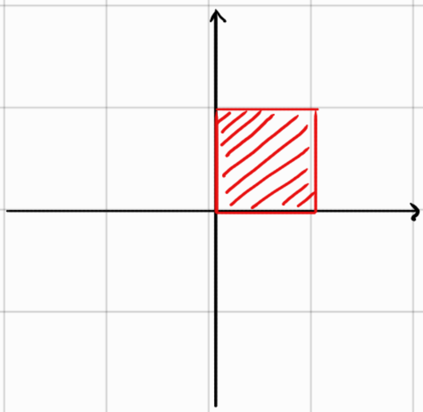
($\subseteq$) $(x,y) \in X \times Y \setminus (C \times D) \Rightarrow x \notin C$ o $y \notin D \rightarrow (x,y) \in [(X \setminus C) \times Y] \cup [X \times (Y \setminus D)]$

($\supseteq$) se $(x,y) \in (X \setminus C) \times Y \Rightarrow x \in X \setminus C$, $y \in Y \Rightarrow (x,y) \notin C \times D$ poiché

$x \notin C \Rightarrow (x,y) \in (X \times Y) \setminus (C \times D)$, analog. per l'altro

caso $Fr_{\mathbb{R}^2}([0,1] \times [0,1])$:





$$Fr_{\mathbb{R}^2}([0,1] \times [0,1]) = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$$

(3) Siano $A \subset X$, $B \subset Y$ chiusi. Dimostrare che $A \times B$ chiuso in $X \times Y$.

risposta:

$A \times B$ chiuso in $X \times Y \iff (X \times Y) \setminus (A \times B)$ aperto in $X \times Y$

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \times Y) \cap (A \times B)^c =$$

$$= (X \times Y) \cap [((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B))] =$$

$$= [X \times Y \cap ((X \setminus A) \times Y)] \cup [(X \times Y) \cap (X \times Y \setminus B)] =$$

$$= \underbrace{((\underbrace{X \setminus A}_{\text{aperto}}) \times Y)}_{\text{aperto nella topologia prodotto}} \cup \underbrace{(X \times (\underbrace{Y \setminus B}_{\text{aperto}}))}_{\text{aperto topologia prodotto}} \Rightarrow$$ aperto perché unione di due aperti

(4) Consideriamo una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$ e sia $A_i \subset X_i$ chiuso in X_i, $\forall i \in I$.

Dimostrare che $\prod_{i\in I} A_i$ e' chiuso in $\prod_{i\in I} X_i$.

risposta:

per dimostrare che $\prod_{i\in I} A_i$ chiuso in $\prod_{i\in I} X_i$ vado a calcolare il suo complementare

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ (x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i , \forall i \in I \}$$

$$\prod_{i\in I} A_i = \{ (x_i)_{i\in I} : x_i \in A_i , \forall i \in I \}$$

$$\Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \setminus \prod_{i\in I} A_i = \{ (x_i)_{i\in I} : \exists i \in I , x_i \notin A_i \}$$

$$\prod_{i\in I} X_i \setminus \prod_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1} (X_i \setminus A_i)$$

$$\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i \qquad \Rightarrow \qquad \pi_i^{-1} : X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

$$(x_i)_{i\in I} \longmapsto x_i \qquad\qquad x_i \longmapsto (\dots , x_i , \dots)$$

$$\Rightarrow \pi_i^{-1} (X_i \setminus A_i) = \{ (\dots , x_i , \dots) \in \prod_{i\in I} X_i \mid x_i \notin A_i \}$$

gli aperti di base della topologia prodotto sono del tipo $\prod_{i\in I} U_i$ dove $U_i \subseteq X_i$ aperto e $U_i \neq X_i$ per un numero finito di indici i in I

$\pi_i^{-1} (X_i \setminus A_i) = \prod_{j\in I} V_j$ tali che $V_j = X_i \setminus A_i$, se $i = j$

$V_j = X_j$, se $i \neq j$

$\Rightarrow \pi_i^{-1} (X_i \setminus A_i)$ e' aperto in $\prod_{i\in I} X_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} \pi^{-1} (X_i \setminus A_i)$ aperto in $\prod_{i\in I} X_i$

$\Rightarrow \prod_{i\in I} A_i$ e' chiuso in $\prod_{i\in I} X_i$

$\square$

(5) Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ha la topologia banale.

risposta:

il gruppo quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è definito nel seguente modo:

$\sim$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$

$[x] = \{ y \in \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q} \}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}/\sim = \{ [x] : x \in \mathbb{R} \}$ $\quad \pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\sim, \quad x \longmapsto [x]$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è dotato quindi della topologia quoziente:

$\tau_\sim = \{ V \subset \mathbb{R}/\sim \text{ t.c. } \pi^{-1}(V) \subset \mathbb{R} \text{ aperto} \}$

voglio dimostrare che $\tau_\sim$ e τ_{ban} coincidano considerando la topologia banale su $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

$\tau_{ban} = \{ \phi, \mathbb{R}/\mathbb{Q} \}$

considero quindi la mappa:

$$id : (\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \tau_\sim) \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \tau_{ban})$$
$$[x] \longmapsto [x]$$

voglio mostrare che questa mappa è un omeomorfismo, se questo è vero allora ho che $\tau_\sim \equiv \tau_{ban}$

- id è continua (ok)
- id è biiettiva
- voglio mostrare quindi che $id^{-1} : (\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \tau_{ban}) \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \tau_\sim)$ è continua

suppongo p.a. che non sia continua ossia che $\exists V \subset \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ tale che $\tilde{\pi}^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ sia aperto e $V \neq \phi \wedge V \neq \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\pi}^{-1}(V)$ è invariante per traslazioni con q nei razionali

poiché $x \in \tilde{\pi}^{-1}(V) \Rightarrow x+q \in \tilde{\pi}^{-1}(V)$, $\forall q \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'unico aperto $\neq \phi$ invariante in $\mathbb{R}$ per traslazione $\forall q \in \mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$

stesso $\Rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(V) = \mathbb{R}$ $\lightning$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è dotato della topologia banale

$\square$

(6) Dimostrare che la seguente funzione è ben definita e continua:

$$\varphi : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$$

risposta:

ben definita: devo dimostrare che la funzione non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza scelto:

$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x = \lambda y$

$\Rightarrow [x] = [y] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c. $x = \lambda y$

sia $y \in [x] \Rightarrow y = \lambda x \Rightarrow \varphi([y_0 : y_1 : y_2]) = \dfrac{\lambda^2 x_0 x_1}{\lambda^2 x_0^2 + \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2} =$

$$= \frac{\lambda^2}{\lambda^2}\left(\frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2} = \varphi([x_0 : x_1 : x_2])$$

$\Rightarrow$ la funzione non dipende dal rappresentante scelto continuità: voglio dimostrare che la funzione

$\varphi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} /\sim \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ vado a utilizzare il

Teorema: $f: X/\sim \longrightarrow Y$ continua $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi: X \longrightarrow Y$ continua

considero quindi

$$\hat{\varphi}: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, x_1, x_2) \longmapsto \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$$

continua perché $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0$, $\forall (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$\hat{\varphi} = \varphi \circ \pi$ continua $\Rightarrow$ φ continua

$\square$