Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 3

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare le seguenti.

   (a) $B^n \cong [-1,1]^n \subset R^n$.
   (b) $\mathrm{Int}_{R^n} B^n = \{x \in R^n \mid \|x\| < 1\}$.
   (c) $\mathrm{Int}_{R^n} B^n \cong R^n$.
   (d) $\mathrm{Fr}_{R^n} B^n = S^{n-1}$.

2) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è detta *Lipschitziana* se $\exists\, K \geq 0$ t.c. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. Sia $f\colon X \to Y$ Lipschitziana. Dimostrare che f è continua.

3) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è *isometrica* se $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. f è un'*isometria* se è isometrica e suriettiva. Dimostrare che le isometrie sono omeomorfismi e concludere che le applicazioni isometriche sono immersioni.

4) Dimostrare che C^n e R^{2n} sono isometrici rispetto alla distanza Euclidea, quindi omeomorfi.

5) Sia V spazio vettoriale normato e $w \in V$. Definiamo la traslazione

$$t_w\colon V \to V, \quad t_w(v) = v + w.$$

Dimostrare che t_w è isometria e dunque omeo.

6) Siano $X = X_1 \cup X_2$ e Y spazi topologici, con $X_1, X_2 \subset X$ chiusi, e siano $f_i\colon X_i \to Y$, $i = 1, 2$, continue t.c. $f_1(x) = f_2(x)$ $\forall\, x \in X_1 \cap X_2$. Definiamo $f\colon X \to Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in X_2. \end{cases}$$

Dimostrare che f è ben definita e continua (si chiama *Lemma d'incollamento*). Cosa succede senza l'ipotesi X_1, X_2 chiusi? Se sono entrambi aperti?

7) Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e per $K = R$ oppure C consideriamo lo spazio delle matrici $M_{m,n}(K)$ e poniamo $\|A\| := \big(\mathrm{tr}({}^t\bar{A}A)\big)^{\frac{1}{2}}$, dove $\mathrm{tr}(M)$ è la traccia di $M \in M_n(K)$ (somma delle entrate sulla diagonale principale). Mostrare che

(a) $\|\cdot\|$ è una norma su $M_{m,n}(K)$;

(b) $M_{m,n}(K)$ è isometrico, dunque omeomorfo, a K^{mn};

(c) $\mathrm{GL}_n(K)$ è aperto in $M_n(K)$;

(d) $\mathrm{SL}_n(K)$ è chiuso in $M_n(K)$;

(e) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi in $M_n(R)$.

(f) $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono chiusi in $M_n(C)$.

8) Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U \subset X$ intorno di x_0 t.c.

$$x \in U \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

9) Sia (X, d) uno spazio metrico e Y uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall x_0 \in X$, $\forall V \subset Y$ intorno aperto di $f(x_0)$, $\exists \delta > 0$ t.c.

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) \in V.$$

10) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to R$ continue. Dimostrare che le funzioni $f+g$, fg e $\frac{f}{g}$ (quest'ultima definita nell'aperto $U = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$) sono continue.

11) Sia $f : X \to Y$ omeo e $A \subset X$. Dimostrare che $f|_A : A \to f(A)$ omeo.

12) Sia $\Gamma \subset R^2$ un'ellisse. Dimostrare che $\Gamma \cong S^1$.

13) Consideriamo lo spazio vettoriale delle successioni reali a supporto finito (aventi al più soltanto un numero finito di termini non nulli)

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n = 0 \ \forall n > N\}.$$

Per ogni $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ poniamo

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}, \qquad \|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

(a) Mostrare che queste sono due norme su X. Indichiamo con $\mathcal{T}_\infty$ e $\mathcal{T}_1$ le rispettive topologie indotte su X.

(b) Mostrare che $\|\cdot\|_\infty : X \to R$ è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}_1$.

(c) Mostrare che $\|\cdot\|_1 : X \to R$ non è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}_\infty$.

(d) Concludere che $\mathcal{T}_\infty \subsetneq \mathcal{T}_1$ e che quindi queste due norme non sono equivalenti.

(e) Determinare una base di X e concludere che $\dim X = \infty$.

Foglio 3:

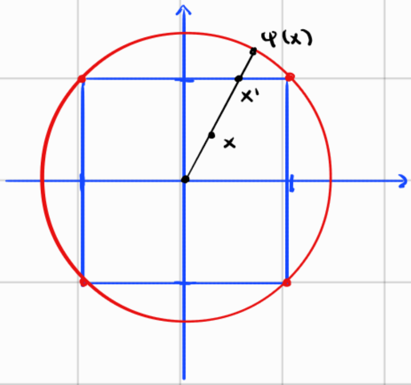
1) costruire i seguenti omeomorfismi:

(a) $B^n \simeq [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

$[-1,1]^n$ quadrato n-dimensionale

in $\mathbb{R}^2$: $B^2 \simeq [-1,1] \times [-1,1]$



scrivo l'omeomorfismo che mi manda un punto dell'intervallo $[-1,1]^2$ in un punto di B^2

$$\varphi : [-1,1]^2 \longrightarrow B^2$$

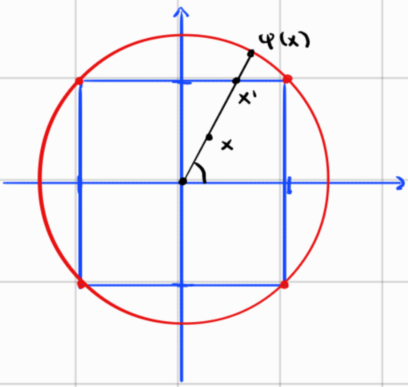
$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x'\|} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

con x' = pto di intersezione fra la retta passante per $(0,0)$ e x

e $Fr([-1,1]^2)$

infatti se $x = x'$ (ossia $x \in S^1$) allora $\dfrac{\|x\|}{\|x'\|} = \dfrac{\|x\|}{\|x'\|} = 1$

$\dfrac{x}{\|x'\|} \in B^2$? $\qquad \dfrac{\|x\|}{\|x'\|} \leq 1$ perché esplicitamente si ha che la retta passante per $x = (x_1, x_2)$ e $(0,0)$ è



$$\frac{y-0}{x_2-0} = \frac{x-0}{x_1-0}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x_2}{x_1} x$$

$x' = (x_1', 1)$ (nel disegno)

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{x_2}{x_1} x_1' \quad \Rightarrow \quad x_1' = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|x\|^2}{\|x'\|^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1'^2+x_2'^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2} = x_2^2 \cdot \frac{x_1^2+x_2^2}{x_2^2+x_1^2} = x_2^2 \leq 1$$

biettiva:

iniettività: considero $x \in [-1,1]^2$ e considero $y \neq x$, $y \in [-1,1]^2$.

Ho due casi:

- $y \notin$ retta $\underline{0}-x \Rightarrow x' \neq y' \rightarrow \frac{x}{\|x'\|} \neq \frac{y}{\|y'\|}$
- $y \in$ retta $\underline{0}-x \Rightarrow x' = y'$ ma $\frac{x}{\|x'\|} \neq \frac{y}{\|x'\|}$ perché $x \neq y$

quindi l'iniettività è soddisfatta

suriettività: okay

continua: composizione di f. continue in $\mathbb{R}^2$ (limite a $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$)

inversa: $\varphi^{-1}: B^2 \longrightarrow [-1,1]^2$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & , x=0 \\ x \cdot \|x'\| & , x \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$ è un omeomorfismo

posso generalizzare questa costruzione a dimensione n considerando come x' il punto di intersezione fra l'iperpiano $n-1$ dimensionale di $\mathbb{R}^n$ passante per x e $\underline{0}$ e $[-1,1]^n$

(b) + (d) $\quad \text{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$

Risposta:

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$

B^n è un chiuso in $\mathbb{R}^n$ poiché $B^n = f^{-1}((-\infty, 1])$

con $f = \|.\|$ funzione norma su $\mathbb{R}^n$ che risulta essere una funzione continua

$\Rightarrow$ B^n è preimmagine tramite funzione continua di un chiuso $\Rightarrow$

$\Rightarrow B^n$ è un chiuso $\Rightarrow Cl_{\mathbb{R}^n}(B^n) = B^n$

$Cl_{\mathbb{R}^n}(B^n) = \text{Int}_{\mathbb{R}^n}(B^n) \cup Fr_{\mathbb{R}^n}(B^n)$

$Fr_{\mathbb{R}^n}(B^n) = Cl_{\mathbb{R}^n}(B^n) \cap Cl_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus B^n) =$

$= B^n \cap Cl_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus B^n) = B^n \cap \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}} =$

$\underset{(*)}{=} B^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

(*) poiché $\mathbb{R}^n$ è spazio normato e dunque si ha che

$Cl_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n \setminus B^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus B^n) = 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus B^n} \|x - \xi\| = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$

(c) $\quad \text{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n \simeq \mathbb{R}^n$

$\text{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ e voglio costruire un omeomorfismo

t.c. $\text{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n$ sia mappato in $\mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$

$x = (x_1, x_2)$ tale che $\|x\| < 1$

$\Rightarrow$ definisco $\varphi(x) := \dfrac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$, $\varphi : \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n}(B^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

dominio di definizione di φ: $1 - \|x\|^2 > 0 \iff \|x\|^2 < 1 \iff$

$\iff 0 < \|x\| < 1 \iff \|x\| < 1$

copre tutto $\mathbb{R}^n$ per codominio

iniettività: considero $x_1 \neq x_2$. allora :

- o $\|x_1\| \neq \|x_2\| \Rightarrow \dfrac{x_1}{\sqrt{1-\|x_1\|^2}} \neq \dfrac{x_2}{\sqrt{1-\|x_2\|^2}} \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$
- o $\|x_1\| = \|x_2\| \Rightarrow \dfrac{x_1}{\sqrt{1-\|x_1\|^2}} \neq \dfrac{x_2}{\sqrt{1-\|x_1\|^2}}$ altrimenti $x_1 = x_2$

$\Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

suriettività: sia $x \in \mathbb{R}^n \overset{?}{\Rightarrow} \exists\, y \in \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n$ t.c. $\varphi(y) = x$

$\varphi(y) = x \iff \dfrac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}} = x$

prima considero le norme $\Rightarrow \dfrac{\|y\|}{\sqrt{1-\|y\|^2}} = \|x\|$

$\iff \dfrac{\|y\|^2}{1 - \|y\|^2} = \|x\|^2 \iff \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \iff$

$\iff \|y\|^2 (1 + \|x\|^2) = \|x\|^2 \iff \|y\|^2 = \|x\|^2 / 1 + \|x\|^2 \iff$

$$\iff \frac{y}{\sqrt{1-\frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2}}} = x \iff \frac{y}{\sqrt{\frac{1+\|x\|^2-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}}} = x \iff$$

$$\iff \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{1+\|x\|^2}}} = x \iff y = \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$$

questa inversa è definita $\forall x \in \mathbb{R}^n$ perché l'unico vincolo di definizione è che $1+\|x\|^2 > 0 \iff \|x\|^2 > -1$ okay perché la norma è sempre positiva

inversa: $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$ continua

$\Rightarrow \varphi$ omeomorfismo fra $\text{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n$ e $\mathbb{R}^n$

(2) (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. Lipschitziana se $\exists K \geq 0$ t.c.

t.c. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K \, d_X(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.

Dimostrare che f è continua.

risposta:

ricordiamo la caratterizzazione della continuità in spazi metrici:

$\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ t.c. $d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

- fisso $x_0 \in X$ e fisso $\varepsilon > 0$. Allora devo esplicitare $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

- $d_Y(f(x_0), f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lipschitzianità}}}{\leq} K \, d_X(x_0, x) = (*)$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ considerando dunque $\delta < \frac{\varepsilon}{k}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(*) < \varepsilon$ $\Rightarrow$ f continua.

$\square$

(3) (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. $f: X \to Y$ isometrica se

$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.

f isometria se f è isometrica e suriettiva. Dimostrare che isometrie sono omeomorfismi e le applicazioni isometriche sono immersioni.

risposta:

devo mostrare che f isometria $\Rightarrow$
- f continua
- f biiettiva
- f^{-1} continua

- f continua:

fisso $x_0 \in X$, fisso $\varepsilon > 0$, devo esibire un $\delta > 0$.

fisso $x \in X$, $d_Y(f(x_0), f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isometria}}}{=} d_X(x_0, x) = (*)$

prendendo dunque $\delta = \varepsilon$ $\Rightarrow$ $(*) < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow$ f continua

- f biiettiva:

f suriettiva per definizione

f iniettiva: considero $x_1 \neq x_2 \Rightarrow d_X(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{d_Y(f(x_1), f(x_2))}_{= d_X(x_1, x_2)} > 0 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\Rightarrow$ è invertibile

- f^{-1} continua: $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

f^{-1} è ancora isometrica: $d_Y(y_1, y_2) \underset{\uparrow}{=} d_Y(f(x_1), f(x_2)) =$

f isometria suriettiva $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in X$ t.c. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

$= d_X(x_1, x_2) = d_X(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$

$\Rightarrow f^{-1}$ è continua

$\Rightarrow f$ omeomorfismo

ora considero $f : X \to Y$ isometrica $\Rightarrow f|_{f(X)} : X \longrightarrow f(X) \subset Y$ è una isometria $\Rightarrow$ è un omeomorfismo $\Rightarrow f$ isometrica è un'immersione

(4) Dimostrare che $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$ sono isometrici rispetto alla distanza euclidea (e dunque omeomorfi per (3))

risposta:

$(\mathbb{C}^n, d_{\mathbb{C}^n})$, $d_{\mathbb{C}^n}(z_1, z_2) = \sqrt{|z_1^1 - z_2^1|^2 + \dots + |z_1^n - z_2^n|^2}$

$(\mathbb{R}^{2n}, d_{\mathbb{R}^{2n}})$, $d_{\mathbb{R}^{2n}}(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + \dots + (x_1^{2n} - x_2^{2n})^2}$

devo costruire un'isometria fra questi due spazi metrici:

$$\varphi: \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$z = x + iy \longmapsto (x, y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^n$$

dimostro che questa mappa è un'isometria ossia devo dimostrare

che $d_{\mathbb{R}^{2n}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_{\mathbb{C}^n}(z_1, z_2)$ + suriettività

$$d_{\mathbb{R}^{2n}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + \dots + (x_1^n - x_2^n)^2 + (y_1^1 - y_2^1) + \dots + (y_1^n - y_2^n)}$$

$$d_{\mathbb{C}^n}(z_1, z_2) = \sqrt{|z_1^1 - z_2^1|^2 + \_\_ + |z_1^n - z_2^n|^2} =$$

$$z_1 = (z_1^1, \_\_, z_1^n) = (x_1^1 + iy_1^1, \_\_, x_1^n + iy_1^n)$$

$$z_2 = (z_2^1, \_\_, z_2^n) = (x_2^1 + iy_2^1, \_\_, x_2^n + iy_2^n)$$

$$= \sqrt{Re(z_1^1 - z_2^1)^2 + Im(z_1^1 - z_2^1)^2 + \_\_ + Re(z_1^n - z_2^n)^2 + Im(z_1^n - z_2^n)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1^1 - x_2^1)^2 + (y_1^1 - y_2^1)^2 + \dots + (x_1^n - x_2^n)^2 + (y_1^n - y_2^n)^2} =$$

$$= d_{\mathbb{R}^{2n}}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

devo mostrare ora che la mappa è suriettiva.

Considero $y \in \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow y = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^n$ t.c.

$z = x_1 + ix_2$

$\Rightarrow$ sono isometrici e quindi omeomorfi.

(5) V spazio vettoriale normato e $w \in V$. Definisco la traslazione

$$t_w: V \longrightarrow V \quad , \quad t_w(v) = v + w$$

dimostrare che t_w è un'isometria.

risposta:

V spazio dotato di una norma $\Rightarrow$ V è uno spazio metrico dotato della metrica indotta dalla norma ossia

$$d_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \longmapsto \| v - w \|_V$$

devo dunque dimostrare che

$$d_V(v_1, v_2) = d_V(t_w(v_1), t_w(v_2))$$

e che t_w è suriettiva.

$$d_V(t_w(v_1), t_w(v_2)) = d_V(v_1 + w, v_2 + w) = \| v_1 + w - (v_2 + w) \| =$$

$$= \| v_1 + w - v_2 - w \| = \| v_1 - v_2 \| = d_V(v_1, v_2)$$

suriettività: sia $v \in V \overset{?}{\Rightarrow} \exists s \in V$ t.c. $t_w(s) = v$

considero $s = v - w \in V$ (differenza di due elementi dello sp. vett.)

$$\Rightarrow \quad t_w(s) = v - w + w = v$$

$\square$

(6) $X = X_1 \cup X_2$, Y sp. topologici con $X_1, X_2 \subset X$ chiusi e siano $f_i : X_i \longrightarrow Y$, $i = 1, 2$ continue t.c. $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1 \cap X_2$.

Definisco $f : X \longrightarrow Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in X_1 \\ f_2(x) & , x \in X_2 \end{cases}$$

Dimostrare che f ben definita e continua.

Senza l'ipotesi X_1, X_2 chiusi cosa succede? Se sono entrambi chiusi?

risposta:

- f ben definita:

sia $x \in X$. Allora ho che:

(i) se $x \in X_1 \setminus X_2 = X_1 \cap X_2^c = X_1 \cap (X_1 \cup X_2 \setminus X_2) = X_1 \Rightarrow f(x) = f_1(x)$

(ii) se $x \in X_2 \setminus X_1$, $f(x) = f_2(x)$

(iii) se $x \in X_1 \cap X_2$, $f(x) = f_1(x) = f_2(x)$ p.i.

- f continua:

vado a verificare la definizione di continuità in uno spazio topologico, considero un chiuso $C \subset Y$ e voglio verificare che $f^{-1}(C) \subseteq X$ è chiuso

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\} = \underbrace{\{x \in X_1 : f_1(x) \in C\}}_{= \{x \in X : f(x) \in V\} \cap X_1} \cup \underbrace{\{x \in X_2 : f_2(x) \in C\}}_{= \{x \in X : f(x) \in V\} \cap X_2} =$$

$$= f_1^{-1}(C) \cup f_2^{-1}(C)$$

f_1 e f_2 continue $\rightarrow$ $f_1^{-1}(C)$ chiuso in X_1 e $f_2^{-1}(C)$ chiuso in X_2 $\Rightarrow \exists\ C_1, C_2$ chiusi in X t.c. $f_1^{-1}(C) = C_1 \cap X_1$

$f_2^{-1}(C) = X_2 \cap C_2 \Rightarrow f^{-1}(V) = (X_1 \cap C_1) \cup (X_2 \cap C_2)$

chiuso in X.

- se sono entrambi aperti la proposizione vale e la dim. è la stessa

- tolgo la condizione X_1, X_2 chiusi:

Controesempio: $X = \mathbb{R}$, $X_1 = (-\infty, 0]$, $X_2 = (0, +\infty)$, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$

$X = X_1 \cup X_2$ ma $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ non continua

$\square$

(7) $\forall m,n \in \mathbb{N}$ e per $K=\mathbb{R}$ o $K=\mathbb{C}$ considero lo spazio $M_{m,n}(K)$ e pongo $\|A\| := (tr({}^t\bar{A}A))^{1/2}$, $tr(M)$ traccia di $M \in M_n(K)$.

Mostrare:

(a) $\|\cdot\|$ norma su $M_{m,n}(K)$

Risposta: vado a verificare che quella funzione soddisfa le le proprietà della norma

(a) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{M_{m,n}(K)}$

$$\|A\| = (tr({}^t\bar{A}A))^{1/2} = 0 \iff tr({}^t\bar{A}A) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 0$$

$$tr({}^t\bar{A}A) = \sum_{j=1}^{n} ({}^t\bar{A}A)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2$$

somma di quantità tutte positive o nulle $=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{ij} = 0, \ \forall i,j \Rightarrow A = 0$

(b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

$$\|\alpha A\| = (tr({}^t(\overline{\alpha A})(\alpha A)))^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}\alpha\, \bar{a}_{ij}a_{ij}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(|\alpha|^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}a_{ij}\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}a_{ij}\right)^{1/2} =$$

$\bar{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$

$$= |\alpha|\,(tr({}^t\bar{A}A))^{1/2} = |\alpha|\,\|A\|$$

(c) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

$$\|A+B\|^2 = tr({}^t(\overline{A+B})(A+B)) =$$

$$= tr({}^t(\bar{A}+\bar{B})(A+B)) = tr(({}^t\bar{A} + {}^t\bar{B})(A+B)) =$$

$$= tr({}^t\bar{A}A + {}^t\bar{B}B + {}^t\bar{A}B + {}^t\bar{B}A) =$$

$$= tr({}^t\bar{A}A) + tr({}^t\bar{B}B) + tr({}^t\bar{A}B + {}^t\bar{B}A) =$$

$$= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\,Re\,(tr({}^t\bar{A}B)) =$$

$$= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\,Re\left(\sum_{i,j} \bar{a}_{ij} b_{ij}\right) = (*)$$

$$\left|\sum_{i,j} \bar{a}_{ij} b_{ij}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \sqrt{\sum |a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum |b_{ij}|^2} = \|A\|\,\|B\|$$

Cauchy - Schwarz

$$(*) \leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| = (\|A\| + \|B\|)^2$$

$\Rightarrow$ considerando la radice quadrata di entrambi i membri ho

che $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ è una norma su $M_{m,n}(K)$. □

(b) $M_{m,n}(K)$ è isometrico a K^{mn}

risposta:

costruiamo un'isometria fra $(M_{m,n}(K), d_M)$ e (K^{mn}, d_K)

dove d_M è la metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|$ su $M_{m,n}(K)$

e d_K norma euclidea su K^{mn}

$$f: M_{m,n}(K) \longrightarrow K^{m\cdot n}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn})$$

devo verificare che $d_M(A,B) = d_{K^{m\cdot n}}(f(A), f(B))$ + suriettività

$$d_M(A,B) = \|A-B\| = \left(tr\left({}^t(\overline{A-B})(A-B)\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$d_{K^{m\cdot n}}((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}), (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{mn})) =$

$$= (|a_{11} - b_{11}|^2 + |a_{12} - b_{12}|^2 + \dots + |a_{mn} - b_{mn}|^2)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

suriettività: sia $x \in K^{m\cdot n}$ $\Rightarrow$ $\exists A \in M_{m\times n}(K)$ tale che

$f(A) = x$ (ok)

$\square$

(c) $GL_n(K)$ aperto in $M_n(K)$

risposta:

$GL_n(K) = \{ A \in M_n(K) : \det(A) \neq 0 \}$

$\det : M_n(K) \longrightarrow K$ funzione continua

$GL_n(K) = \det^{-1}(K \setminus \{0\})$ e i singoletti in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con la topologia euclidea sono chiusi $\Rightarrow$ $GL_n(K)$ aperto perché preimmagine di un aperto tramite una funzione continua.

$\square$

(d) $SL_n(K)$ è chiuso in $M_n(K)$

risposta:

$SL_n(K) = \{ A \in M_n(K) : \det(A) = 1 \}$ $\Rightarrow$ $SL_n(K) = \det^{-1}(\{1\})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $SL_n(K)$ è chiuso in $M_n(K)$ poiché preimmagine di un chiuso tramite una funzione continua. $\square$

(e) $O(n)$ e $SO(n)$ chiusi in $M_n(\mathbb{R})$

Risposta:

$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = \mathbb{1}_n \}$

gruppo ortogonale

considero la funzione $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$A \longmapsto A^t A$

è una funzione continua :

dim: ho visto nei punti prima che posso dotare $M_n(\mathbb{R})$ della metrica che indotta dalla norma $\|\cdot\|$ che ho visto prima

Per verificare la continuità allora devo verificare che

$\forall A \in M_n(K) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall B \in M_n(K) \quad$ t.c. $\|A - B\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \|\varphi(A) - \varphi(B)\| < \varepsilon$

fisso $A \in M_n(K)$, fisso $\varepsilon > 0$. Devo esibire un

considero $B \in M_n(K)$ e vado a scrivere:

$A^t A - B^t B = A^t A - A^t B + A^t B - B^t B =$

$= A^t (A - B) + (A^t - B^t) B \quad$ sommando e sottraendo $A^t B$

$\Downarrow$

$\|A^t A - B^t B\| \leq \|A^t (A - B)\| + \|(A^t - B^t) B\| =$

$= \|A^t\| \, \|A - B\| + \|A^t - B^t\| \, \|B\| =$

$= \|A^t\| \, \|A - B\| + \|(A - B)^t\| \, \|B\| =$

$= \|A\| \, \|A - B\| + \|A - B\| \, \|B\| =$

$$= (\|A\| + \|B\|) \quad \|A - B\| \quad = \quad (*)$$

scelgo dunque $\quad \delta = \dfrac{\varepsilon}{\|A\| + \|B\|}$

$\Rightarrow$ se $\quad \|A - B\| < \delta \quad \Rightarrow \quad (*) < \varepsilon$

$\square$

allora ho che $\quad O(n) = \varphi^{-1}(\{\mathbb{1}_n\})$ quindi è controimmagine tramite una funzione continua di un chiuso.

$\{\mathbb{1}_n\}$ è chiuso in $M_n(\mathbb{K})$ perchè i singoletti sono chiusi (sono in uno spazio metrico)

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$

$SO(n) = O(n) \cap \det^{-1}(\{1\})$ intersezione di due chiusi $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ è chiuso

(f) $\quad U(n)$ e $SU(n)$ chiusi in $M_n(\mathbb{C})$

risposta:

$U(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ t.c. } {}^t\bar{A}A = \mathbb{1}_n \}$

in maniera del tutto analoga procedo come nel punto (e)

definisco $\quad \varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$

$$A \longmapsto {}^t\bar{A}A$$

$\Rightarrow \quad U(n) = \varphi^{-1}(\{\mathbb{1}_n\})$ chiuso in $M_n(\mathbb{C})$

$SU(n) = \{ A \in U(n) \mid \det(A) = 1 \}$

$\Rightarrow \quad SU(n) = U(n) \cap \det^{-1}(\{1\})$ chiuso

$\square$

(8) Sia (Y, d) spazio metrico e X sp. topologico.

Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U \subset X$ intorno di x_0 t.c. $x \in U \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

risposta:

$(\Rightarrow)$ f continua $\Rightarrow$ $(\dots)$

fisso $x_0 \in X$, fisso $\varepsilon > 0$. Considero quindi

$U = f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$

So che $B_d(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto in Y e f continua $\Rightarrow U$ aperto.

In particolare, quindi, U è intorno di ogni suo punto.

Considero ora $x \in U$. Allora $\exists y \in B_d(f(x_0), \varepsilon)$ tale che

$x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = y$ ma $y \in B_d(f(x_0), \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ fisso $x_0 \in X$, fisso $\varepsilon > 0$.

Considero la palla in Y $B_d(f(x_0), \varepsilon)$ e voglio mostrare che

$f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon)) = A$, con A aperto in X.

ho che $x_0 \in f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$

per ipotesi ho che $\exists U$ intorno aperto di x_0 tale che

$$\mathcal{U} \subset \underset{\substack{\| \\ \{x \in X \,:\, f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))\}}}{f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))} \Rightarrow f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon)) \text{ è aperto in } X$$

$\square$

(9) (X, d) spazio metrico e Y spazio topologico. Dimostrare che $f: X \to Y$ è continua se $\forall x_0 \in X$, $\forall V \subset Y$ intorno aperto di $f(x_0)$ $\exists \delta > 0$ t.c. $d(x_0, x) < \delta \Rightarrow f(x) \in V$.

risposta:

($\Rightarrow$) f continua $\Rightarrow$ (...)

fisso $x_0 \in X$ e fisso V intorno aperto di $f(x_0)$

so che f continua $\Rightarrow$ $f^{-1}(V)$ aperto $\Rightarrow$ siccome X spazio metrico $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f^{-1}(V) = B_d(x_0, \delta)$ $\Rightarrow$ $\forall x$ t.c. $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \in V$.

($\Leftarrow$) condizione $\Rightarrow$ f continua

per verificare la definizione di continuità, considero un aperto $\mathcal{U} \subset Y$ e devo dimostrare che $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset X$ è aperto in X.

fisso $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ $\Rightarrow$ $f(x_0) \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ intorno aperto di $f(x_0)$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ $B_d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$ $\Rightarrow$ dall'arbitrarietà di x_0 ho che $f^{-1}(\mathcal{U})$ aperto in X.

$\square$

(10) Sia X spazio topologico e siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Dimostrare che le funzioni $f+g$, fg e $\frac{f}{g}$ sono continue.

risposta:

(i) la funzione $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ risulta essere definita come

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

considero quindi la funzione
$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a+b \end{aligned}$$

continua

e
$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$
continua (*)

(*) perché φ risulta essere continua?

utilizzo la proprietà fondamentale del prodotto topologico:

$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia prodotto

continua $\Leftrightarrow$ $\tilde{\pi}_i \circ \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2$ proiezioni

rispettivamente sulla 1^a e sulla 2^a componente sono

continue , nel nostro caso $\tilde{\pi}_1 \circ \varphi = f$ continua p.i.

$\tilde{\pi}_2 \circ \varphi = g$ continua p.i.

allora $f+g = \psi \circ \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ composizione di continue è

continua.

(ii)
$$\begin{aligned} fg : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)\,g(x) \end{aligned}$$

posso procedere come nel punto sopra:

considero $\xi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a,b) \longmapsto a \cdot b$ continua

e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua per quello

$x \longmapsto (f(x), g(x))$ che abbiamo detto in

(i)

$\Rightarrow \quad fg = \xi \circ \varphi$ composizione di funzioni continue è

continua

(iii) $\frac{f}{g} : U \longrightarrow \mathbb{R}$

considero la stessa costruzione utilizzata per i precedenti

punti:

considero $\eta : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a,b) \longmapsto \frac{a}{b}$

e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$x \longmapsto (f(x), g(x))$

$\Rightarrow \quad \frac{f}{g} = \eta \circ \varphi$ composizione di continue $\Rightarrow$ continua

$\square$

(11) Sia $f : X \longrightarrow Y$ omeomorfismo e $A \subset X$. Dimostrare che

$f|_A : A \longrightarrow f(A)$ omeomorfismo.

Risposta:

$f|_A$ è iniettiva perchè restrizione di una iniettiva.

$f|_A$ è suriettiva

devo dimostrare che è continua con inversa continua:

$$f|_A : \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"] & f(A) \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad f|_A = f \circ i$$

composizione di continue

$\Rightarrow$ è continua

$$f^{-1}|_A : \begin{tikzcd} f(A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & A \\ Y \arrow[ur, "f^{-1}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}|_A = f^{-1} \circ i$$

composizione di continue

$\Rightarrow$ è continua

(si può fare anche verificando che la preimmagine è aperta nella topologia di sottospazio)

$\square$

(12) Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ellisse. Dimostrare che $\Gamma \simeq \mathbb{S}^1$.

risposta:

devo esibire un omeomorfismo fra l'ellisse e la circonferenza.

Γ ellisse con semiassi $a, b > 0$: $\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$

$\mathbb{S}^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

definisco dunque la funzione: $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma$

$$(x,y) \longmapsto (ax, by)$$

infatti: $\dfrac{(ax)^2}{a^2} + \dfrac{(by)^2}{b^2} = x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (ax, by) \in \Gamma$

controllo che f soddisfi le condizioni per essere un omeomorfismo:

(a) f biiettiva:

iniettiva: $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow (ax_1, y_1) \neq (ax_2, y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (ax_1, by_1) \neq (ax_2, by_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$

suriettiva: considero un punto di $\Gamma \ni (u, v) \Rightarrow$

$\rightarrow$ posso scrivere (u, v), grazie al fatto che $a, b \neq 0$ nel seguente modo: $f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) = (u, v)$

con $\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \in S^1$ poiché $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$

$\Downarrow$

f ammette un' inversa: $f^{-1}: \Gamma \longrightarrow S^1$

$$(u, v) \longmapsto \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

(b) f continua: f è lineare in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ è continua

(c) f^{-1} continua: f^{-1} lineare in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ è continua

$\Downarrow$

f è un omeomorfismo e $\Gamma \simeq S^1$.

Rmk: se l' ellisse è ruotata cosa succede?

Le rotazioni nel piano sono omeomorfismi da $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ matrice ruotata, allora $\exists\, R_\vartheta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $R_\vartheta^{-1}(\Gamma) = \Gamma_0$ con Γ_0 ellisse non ruotata. Prendo dunque

$$f_1 = R_\vartheta \circ f : S^1 \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma.$$

$\square$

(13) spazio vettoriale delle successioni reali a supporto finito

$X = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x_n = 0 \ , \ \forall n > N \}$

$\forall \ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ pongo

$\| x \|_\infty := \max \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \} \ , \quad \| x \|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

(a) mostrare che sono due norme su X.

Risposta:

(1) $\| x \|_\infty = 0 \Rightarrow \max \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\| x \|_1 = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 0 \rightarrow$ somma infinita di

(2) $\| a x \|_\infty = \max \{ |a x_n| : n \in \mathbb{N} \} = \max \{ |a| \ |x_n| : n \in \mathbb{N} \} =$

$= |a| \max \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \} = |a| \ \| x \|_\infty$

$\| a x \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a| \ |x_n| = |a| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| =$

$= |a| \ \| x \|_1$

(3) considero $x, y \in X$ e voglio verificare la disuguaglianza triangolare per la norma

$\| x + y \|_\infty = \max \{ |x_n + y_n| : n \in \mathbb{N} \} \le \max \{ |x_n| + |y_n| : n \in \mathbb{N} \} \le$

$\le \max \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \} + \max \{ |y_n| : n \in \mathbb{N} \} = \| x \|_\infty + \| y \|_\infty$

$\| x + y \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + |y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| =$

$= \| x \|_1 + \| y \|_1$

τ_∞ : $d_\infty : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad d_\infty (x, y) = \| x - y \|_\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ base topologia τ_∞ $\quad B_{d_\infty} (x, r) = \{ y \in X : d_\infty (x, y) < r \}$

τ_1 : $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1 (x, y) = \| x - y \|_1 \Rightarrow$ base topologia τ_1

$B_{d_1}(x,r) = \{ y \in X : d_1(x,r) < r \}$

(b) $\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua rispetto a τ_1

risposta:

dato lo spazio X di τ_1 e controllo che $\|\cdot\|_\infty(x) = \|x\|_\infty$ sia continua

Recall: una funzione $f : X \longrightarrow Y$ fra spazi metrici è continua se $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ si ha che

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

nel mio caso ho $\|\cdot\|_\infty : (X, d_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_{euc.})$

fisso $x_0 \in X$ e fisso $\varepsilon > 0$. Considero quindi $x \in X$ e calcolo:

$$\big| \|x\|_\infty - \|x_0\|_\infty \big| = \big| \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} - \max\{|x_{0,n}| : n \in \mathbb{N}\}\big| =$$

$$= \big| \max\{|x_n| - |x_{0,n}| : n \in \mathbb{N}\}\big| \leq \max\{|x_n - x_{0,n}| : n \in \mathbb{N}\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_{0,n}| = \|x_n - x_0\|_1$$

prendendo quindi $\delta = \varepsilon \Rightarrow$ ho la continuità di $\|\cdot\|_\infty$ rispetto a τ_1.

$\square$

(c) mostrare che $\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ non è continua rispetto alla topologia τ_∞.

risposta:

devo mostrare che esiste una successione tale che la sua norma $\|\cdot\|_\infty$ è arbitrariamente piccola ma la norma 1 non va a 0.

fisso quindi un $n \in \mathbb{N}$ e considero $x = (\underbrace{\frac{1}{n}, \_\_, \frac{1}{n}}_{n\text{ - volte}}, 0, \_\_)$

allora si ha che

$\|x\|_\infty = \max\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{n} < \varepsilon$ ($\exists \varepsilon > 0$ t.c. mi soddisfa questa disuguaglianza)

ma

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{n} \left|\frac{1}{n}\right| = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$\square$

(d) concludere che $\tau_\infty \subsetneq \tau_1$ e dunque le norme non sono equivalenti.

risposta:

si ha che $\tau_\infty = \tau_1 \iff id_X : (X, \tau_\infty) \longrightarrow (X, \tau_1)$ e $id_X : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_\infty)$ sono continue. Come abbiamo visto ho che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ quindi $id_X : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_\infty)$ è continua ma l'altra disuguaglianza non vale $\Rightarrow \tau_\infty \subsetneq \tau_1$.

$\tau_\infty \subsetneq \tau_1$ allora le norme non inducono la stessa topologia $\Rightarrow$

$\rightarrow$ non sono equivalenti.

$\square$

(e) Determinare una base di X e concludere che $\dim(X) = \infty$.

risposta:

$\forall n \in \mathbb{N}$ definisco $e_n = (0, \_\_, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \_\_)$

$\Rightarrow$ un elemento $x = (x_1, \_\_, x_N, 0, \_\_)$ risulta essere uguale a

$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$

$\Rightarrow \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ genera X $\Rightarrow \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema di generatori per X.

controllo quindi la lineare indipendenza:

$\exists K, \sum_{i=1}^{K} a_i e_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, \forall i \Rightarrow$ ho la lineare indipendenza.

$\Rightarrow \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ base di X $\Rightarrow \dim(X) = \infty$.

$\square$