

LIMITI DI SUCCESSIONI

Una successione di numeri naturali è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Invece di scrivere $f(1), f(2), f(3), \dots$ si scrive $x_1, x_2, x_3, \dots$

La successione si indica con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio

$x_n = \frac{1}{n}$ è la successione

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$x_n = 2^n$ è la successione

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

Data una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si dice che :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$,
risulta $|x_n - l| < \varepsilon$.

$$\text{Esempio : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

In questo caso si dice che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente

2) Si dice che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff$

$\forall M > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $x_n \geq M$.

In questo caso si dice che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è divergente

Esempio: $x_n = 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

3) Se una successione non è né convergente né divergente, si dice che è indeterminata.

Esempio: $x_n = (-1)^n$.

Tale successione "salta" tra $+1$ e -1 .

Regole di calcolo

1) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_2$

allora 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = l_1 + l_2$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = l_1 - l_2$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$.

2) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e se $f:]l-r, l+r[\rightarrow \mathbb{R}$ è continua,

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(l)$

Esempio : $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$.

3) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, allora, posto

$$x_n = f(n), \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

4) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = +\infty$

a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$.

o) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$,

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

o) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$,

con $y_n > 0 \ \forall n$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

FORME INDETERMINATE

$$\frac{0}{0}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Si affrontano caso per caso.

LIMITI NOTEVOLI

Si ricavano da quelli per le funzioni.

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

(83)

Sono successioni in cui invece di avere direttamente una legge che a $n \in \mathbb{N}$ associa $x_n \in \mathbb{R}$, ho una regola che mi esprime x_{n+1} in funzione di x_n , e mi assegna un valore iniziale x_0 .

ESEMPIO

Progressione aritmetica

$$x_{n+1} = x_n + k \quad \text{dove } k \text{ è assegnato.}$$

Si ha:

$$x_1 = x_0 + k$$

$$x_2 = x_1 + k = x_0 + k + k = x_0 + 2k$$

$$x_3 = x_2 + k = x_0 + 2k + k = x_0 + 3k$$

Da cui si ricava la legge

$$x_n = x_0 + nk$$

ESEMPIO

Progressione geometrica.

$$x_{n+1} = q x_n$$

(84)

per i primi

$$x_1 = q x_0$$

$$x_2 = q x_1 = q q x_0 = q^2 x_0$$

$$x_3 = q x_2 = q q^2 x_0 = q^3 x_0$$

$\vdots$

$$x_n = q^n x_0$$

$$\text{Se } q > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n x_0 = +\infty$$

$$(\text{se } x_0 > 0)$$

se invece $0 < q < 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n x_0 = 0.$$

La progressione geometrica descrive
ad esempio il decadimento radioattivo
quando $0 < q < 1$, o la crescita
di una popolazione di batteri ($q > 1$)

la successione

$$x_{n+1} = q x_n$$

si dice "modello di Malthus".

In questo modello c'è un tasso fisso
di crescita (o decrescita).

Questo modello non è molto realistico.
 Per questo è stato introdotto il modello
 di Verhulst (mappa logistica) in cui
 il tasso di crescita subisce una
 diminuzione mano a mano che
 la popolazione si avvicina a un
 certo livello, detto livello di
 saturazione.

$$x_{n+1} = q \cdot (1 - x_n) \cdot x_n$$

Si è dimostrato che per valori di
 q compresi tra 0 e 1,

$$0 < q < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

mentre per $1 < q < 3$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{q-1}{q}.$$

Per $q \geq 3$ il comportamento di $(x_n)_n$
 è caotico.

86