

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Premessa

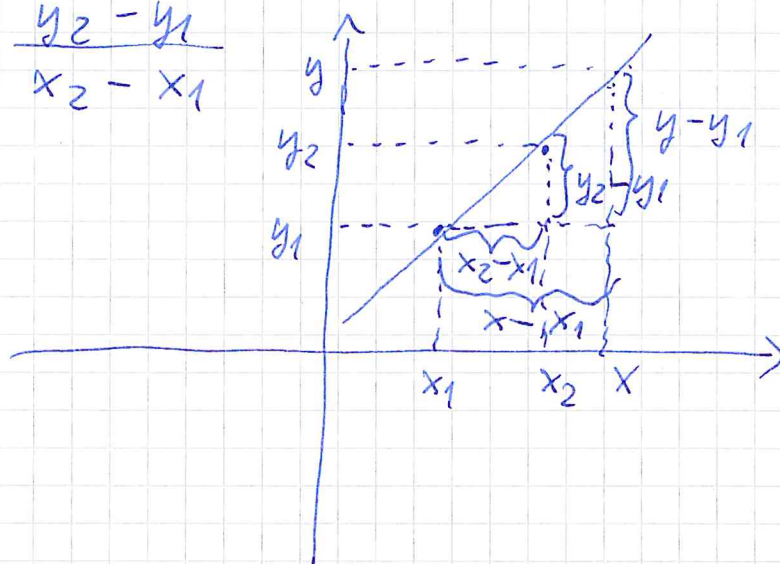
Una retta nel piano ha equazione

$$y = mx + q$$

↳ coefficiente angolare:
misura la pendenza

Dati due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ,
la retta che passa per tali punti è
definita dalle proprietà geometriche

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



da cui si ricava l'equazione

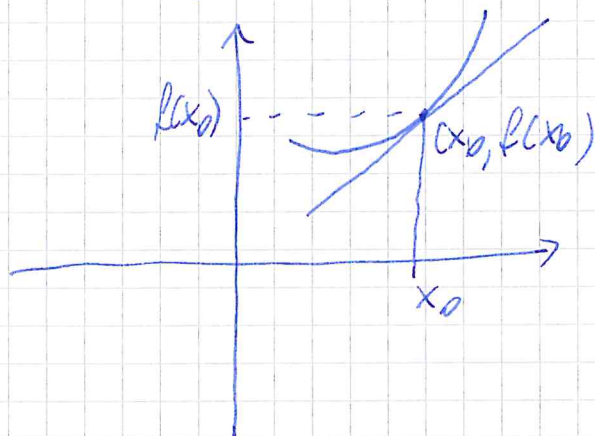
$$y = \underbrace{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)}_{\text{coefficiente angolare}} x - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x_1 + y_1$$

coefficiente angolare.

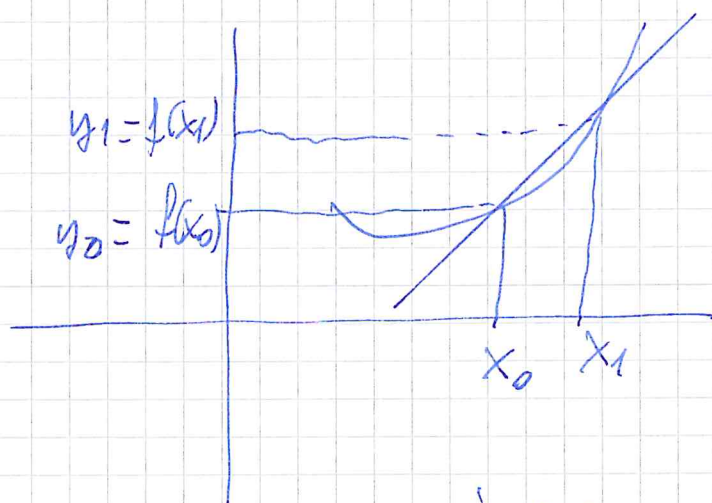
(88)

Sia ora $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

e sia $x_0 \in [a, b]$. Vogliamo trovare la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$



L'ide è di prendere la secante che passa per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$



questa retta ha equazione

$$y = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{\text{coefficiente angolare}} x - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + y_0$$

coefficiente angolare

quindi

$$y = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{coefficiente angolare}} x - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} x_0 + f(x_0)$$

L'idea ora è che se x_1 si avvicina a x_0 , allora la retta si avvicina alla tangente in $(x_0, f(x_0))$.

Dobbiamo quindi calcolare

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

↳ per definizione,
(se esiste)

così la retta tangente sarà

$$y = mx + q \quad \text{dove}$$

$$m = f'(x_0)$$

$$q = -f'(x_0)x_0 + f(x_0)$$

$f'(x_0)$ mi indica la pendenza del grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

(20)

Se $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto di $]a, b[$, si dice che f è derivabile in $]a, b[$. In tale caso nasce una nuova funzione,

$$f':]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x).$$

Derivate elementari:

1) se $f(x) = c$ costante, allora $f'(x) = 0$

2) se $f(x) = ax$ allora $f'(x) = a$

3) se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^+$, allora

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

4) se $f(x) = e^x$, allora $f'(x) = e^x$

5) se $f(x) = \sin x$ allora $f'(x) = \cos x$

6) se $f(x) = \cos x$ allora $f'(x) = -\sin x$

Regole per il calcolo delle derivate:

a) $(f+g)' = f' + g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

b) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Segue che, $n \in \mathbb{N}^+$,

$$7) (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

Derivata della composizione:

$$d) (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Esempio

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$$

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$(\cos x^2)' = -(\sin x^2) \cdot 2x$$

Derivata dell'inversa

$$e) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Segue che

$$8) (\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

$$9) (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n (x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

In generale, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0,$

(92)

$$10) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ ricordando } x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

$$\text{e quindi } (x^\alpha)' = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$11) (a^x)' = (e^{x \log a})' = \log a \cdot e^{x \log a} = (\log a) a^x$$

$$12) (\log_a x)' = (\log_a e \cdot \log_e x)' = (\log_a e) \frac{1}{x} = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$13) (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$14) (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16) (\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{arctan} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$