Lezione 21 - 4/11/2025

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty}$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$ $\quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad (a>1)}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$

$\lg x = y$

$x = e^y$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(e^y)^\varepsilon} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(e^\varepsilon)^y} = 0$ $\quad e^\varepsilon > 1$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^\varepsilon} = 0} \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0}$

Es. $\lim_{x\to 0^+} x^x$ $\longrightarrow$ si tratta di una funzione del tipo $(f(x))^{g(x)}$

suggerimento $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \lg(f(x))}$

e poi considerare cosa fa l'esponente

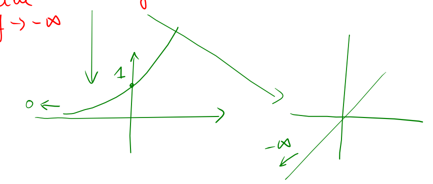
$\lim_{x\to 0^+} e^{x\lg x}$ e poi considero $\lim_{x\to 0^+} x \lg x$ $\quad$ $x \to 0$, $\lg x \to -\infty$ $\quad 0\cdot(-\infty)$?

$\lim_{x\to 0^+} x \lg x =$

$\lg x = y \quad x \to 0^+ \quad y \to -\infty$

$x = e^y$

$= \lim_{y\to-\infty} e^y \cdot y \quad 0\cdot(-\infty)$



$y = -z$

$z = -y$

$= \lim_{z\to+\infty} e^{-z}\cdot(-z) = \lim_{z\to+\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x\lg x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{x\lg x} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

Es. $\lim_{x\to+\infty} x^{\sqrt{x}} - (\sqrt{x})^x$ $\quad +\infty - \infty$

$x^{\sqrt{x}} \to +\infty$, $(\sqrt{x})^x \to +\infty$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}\cdot\lg x} - e^{x\lg(\sqrt{x})}$ $\qquad \lg(\sqrt{x}) = \lg(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\lg x$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}\cdot \lg x} - e^{\frac{1}{2}x\lg x}$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x\lg x}\left(e^{\sqrt{x}\lg x - \frac{1}{2}x\lg x} - 1\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{2}x\lg x}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(e^{\overbrace{\sqrt{x}\lg x-\frac{1}{2}x\lg x}^{\to-\infty}}-1\right)}_{\to -1} = -\infty$$

cerchiamo di capire cosa fa

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\lg x-\frac{1}{2}x\lg x = -\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\lg x}_{+\infty}\underbrace{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)}_{-\infty} = -\infty$$

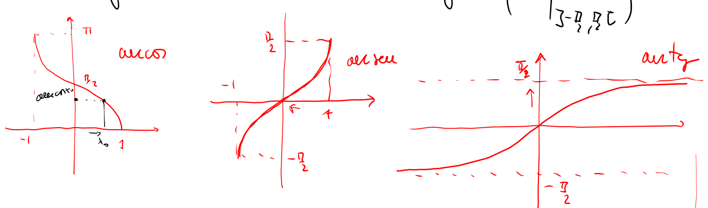
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^{\sqrt{x}}-(\sqrt{x})^{x} = -\infty}$$

Oss. Abbiamo introdotto 3 funzioni

$\arccos : [-1,1]\to[0,\pi]$ $\qquad \arccos = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}$

$\operatorname{arcsen} : [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad \operatorname{arcsen} = \left(\operatorname{sen}_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad \operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$



si può provare che

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0}\arccos x = \arccos x_0\\ \lim_{x\to x_0}\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0\end{array}\right\}\ \forall x_0\in[-1,1]$$

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad x_0\in\mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

ES. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\operatorname{arcsen} x = y$

$x = \operatorname{sen} y$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)}_{0} = +\infty\cdot 0 \ ?$$

$\operatorname{arctg} x = y$ $\qquad x = \operatorname{tg} y$

$x\to+\infty$ $\qquad y\to\frac{\pi}{2}^-$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} y\cdot\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\underbrace{\operatorname{sen} y}_{\to 1}\cdot\frac{\overbrace{\frac{\pi}{2}-y}^{\to 0}}{\underbrace{\cos y}_{\to 0}}$$

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\operatorname{sen} y}_{\to 1}\cdot \frac{\overbrace{\frac{\pi}{2}-y}^{\to 0}}{\underbrace{\cos y}_{\to 0}} = 1$$

resta da calcolare $\displaystyle\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\cos y} = 1$

$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}$$

$\frac{\pi}{2}-y = z$

$$= \lim_{z\to 0^+} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1$$

$$y \longmapsto \frac{\frac{\pi}{2}-y}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}$$

$$y \longrightarrow \frac{\pi}{2}-y = z \longmapsto \frac{z}{\operatorname{sen} z}$$

2 osservazioni

1. limite delle funzioni monotone

ricordo che abbiamo visto il teor. sul limite delle successioni monotone

Teor. sia $(x_n)_n$ una succ. crescente $(x_{n+1}\geq x_n, \forall n)$ o decrescente $(x_{n+1}\leq x_n, \forall n)$

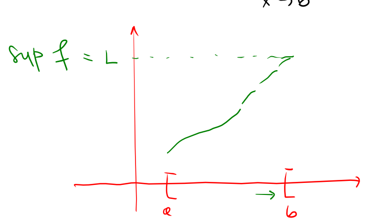
allora esiste sempre $\lim_n x_n$ e vale $\begin{cases} \sup\{x_n\} & \text{cresc.} \\ \inf\{x_n\} & \text{decres.}\end{cases}$

corollario se $(x_n)_n$ è monotona e limitata allora $(x_n)_n$ è convergente

per le funzioni

Teor. sia $f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$, f sia monotona $\begin{cases}\text{cresc.}\\ \text{decresc.}\end{cases}$

Allora esiste $\lim_{x\to b^-} f(x)$ e vale $\begin{cases} \sup\{f(x),\ x\in[a,b[\} & \text{se cres.} \\ \inf\{f(x),\ x\in[a,b[\} & \text{se decr.}\end{cases}$



corollario sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, crescente.

sia $c\in\,]a,b[$

Allora $\exists \lim_{x\to c^-} f(x)$, $\exists \lim_{x\to c^+} f(x)$ e si ha

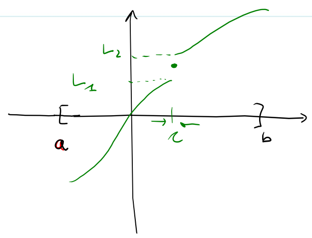
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Corollario sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, crescente.

sia $c\in\,]a,b[$

Allora $\exists \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ e si ha

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x)$$



Osservazione 2.

supponiamo di avere 2 funzioni f, g

e sia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ dirò che f è infinita di ordine superiore a g

es. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ (limite fond.)

e^x è infinita di ordine superiore a x^3 in $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$

$\log x = y$

$x = e^y$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{e^y}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y/2}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(e^{\frac{1}{2}})^y}{y} = +\infty$$

$\sqrt{x}$ è infinita di ordine superiore a $\log x$

se invece $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è di ordine inferiore rispetto a g in x_0

Analogamente

supponiamo che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

se $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un infinitesimo di ordine superiore a g

Es. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\log x}} = 0$

$x\to 0^+$ $\sqrt{x}\to 0$

$x\to 0^+$ $\dfrac{1}{\log x}\to 0$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\log x}_{\downarrow\, -\infty}$$

$\log x = y$

$x = e^y$

$$= \lim_{y\to-\infty} \sqrt{e^y}\cdot y = \lim_{y\to-\infty} e^{y/2}\cdot y = 0$$

in 0^+, $\sqrt{x}$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\dfrac{1}{\log x}$

se f, g sono tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty \end{matrix}$

f e g si dicono dello stesso ordine (o equivalenti) se

$\exists\ \lambda, \Lambda > 0$, $\exists\ U$ di x_0 t.c.

$\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, $\lambda < \frac{f(x)}{g(x)} < \Lambda$

in particolare se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si diranno strettamente equivalenti

Analogo per $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ x e $\operatorname{sen} x$ sono, in 0, infinitesimi strettamente equivalenti

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $e^x - 1$ e x, in 0, sono strett. eq.

$\lim_{x \to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$ $\lg(1+x)$ e x, in 0, sono str. equiv.

se devo calcolare un limite e c'è un $\boxed{\text{fattore}}$ che tende a 0 / o all'infinito, lo posso sostituire con un infinitesimo / infinito strett. equivalente.

Es. $\lim_{x \to 0} \frac{\lg(\cos x)}{\operatorname{sen} x^2}$

$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 1}$

$x \to x^2 = y \to \frac{\operatorname{sen} y}{y} \to 1$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^2}$ sono strett. equiv.

$\lg(\cos x) = \lg(1 + (\cos x - 1))$

$\boxed{\lg(1 + (\cos x - 1))}$ è strett. eq. a $\boxed{\cos x - 1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \left(= \frac{1}{6}\right)$ $\operatorname{sen} x \approx x$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^3} = 0$ $=0$

non si può fare !!

NO

Successioni e topologia di $\mathbb{R}$

1) un'altra versione del teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS

ricordo il 1° teor. di B.W.

TEOR $E \subseteq \mathbb{R}$, E infinito e limitato
Allora $\exists\, \sigma \in \mathbb{R}$, σ punto di acc. per E.

oss. 1° B.W. dice che un insieme infinito e limitato non può essere "troppo sparso" da qualche parte si deve "accumulare".

prendo una successione che sia limitata.
(significa $\exists M>0 : \forall n,\ -M \leq x_n \leq M$)
questa successione in generale non ha limite
ma ammette una sottosuccessione che ha limite ? sì

TEOR (2° teor. di BOLZANO-WEIERSTRASS)
sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$
$(x_n)_n$ sia limitata
Allora $(x_n)_n$ ha almeno una sottosuccessione convergente.

(cioè diremo che da una successione limitata si può sempre estrarre una sottosuccessione convergente)

dim. considero $E = \{ x_n,\ n \in \mathbb{N} \}$
è l'insieme dei valori della successione
è l'insieme delle immagini

$(x_n)_n$ limitata $\iff$ E è limitato

ho 2 possibilità

1) E è anche finito
se E finito almeno uno dei suoi elementi è immagine di infiniti indici n
Allora esiste una sottosuccessione costante e quindi convergente

2) E è infinito quindi
E è infinito e limitato
utilizzo il 1° teor. di BW
E ha un punto di accumulazione $\xi \in \mathbb{R}$

faccio vedere che c'è una sottosucc. che converge a ξ

$\varepsilon = 1$ considero $]\xi-1, \xi+1[$
$\exists\, n_1$ t.c. $x_{n_1} \in]\xi-1, \xi+1[$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $]\xi-\frac{1}{2}, \xi+\frac{1}{2}[$
$\exists\, n_2$, con $n_2 > n_1$, t.c. $x_{n_2} \in]\xi-\frac{1}{2}, \xi+\frac{1}{2}[$
c'è perché gli indici n per cui $x_n \in]\xi-\frac{1}{2}, \xi+\frac{1}{2}[$ sono infiniti

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\exists\, x_{n_k}$: $n_k > n_{k-1}$ e $x_{n_k} \in]\xi-\frac{1}{k}, \xi+\frac{1}{k}[$

$x_n \in \left]\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2}\right[$ sono infiniti

$\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\quad \exists\, x_{n_k} : n_k > n_{k-1}$ e $x_{n_k} \in \left]\xi - \frac{1}{k}, \xi + \frac{1}{k}\right[$

ho che $\forall k$

$$|x_{n_k} - \xi| < \frac{1}{k}$$

ma allora $\lim\limits_{k} x_{n_k} = \xi$

CVD