4 Novembre

$f, g : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione di I (anche $x_0 = \pm\infty$)

se $f'(x)$ e $g'(x)$ esistono in $I \setminus \{x_0\}$,

$g(x)$ e $g'(x) \neq 0$ ovunque in $I \setminus \{x_0\}$,

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$, allora se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

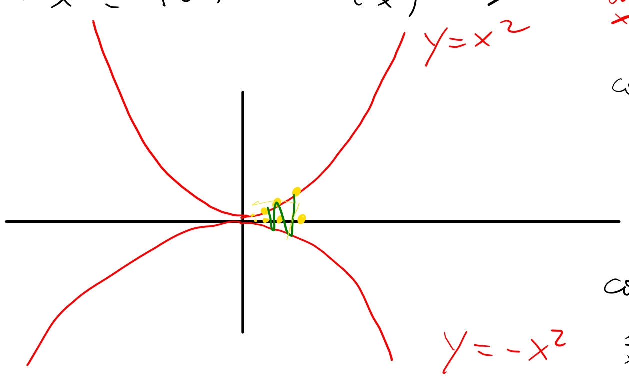
Esempio $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = x$ per $x > 0$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ $\qquad g(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$

$\qquad g'(x) = 1 \neq 0 \ \forall x$

per qualsiasi x

$$-x^2 \le f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$



$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$\frac{1}{x} = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

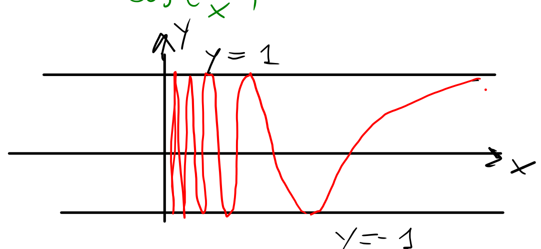
$x = \frac{1}{2\pi k}$

$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -1$

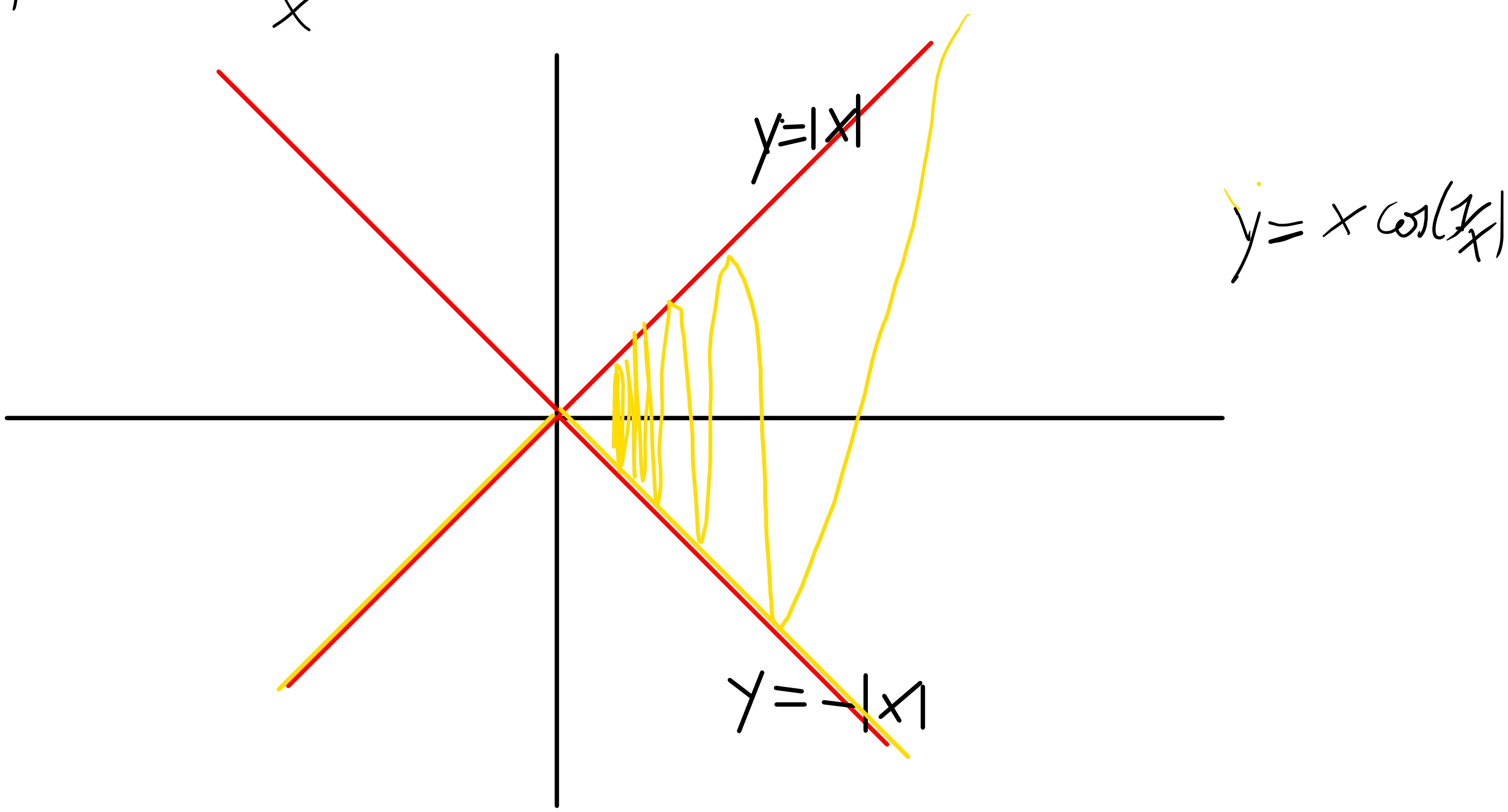
$\frac{1}{x} = \pi(2k+1)$

$x = \frac{1}{\pi(2k+1)}$

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$-|x| \le \frac{f(x)}{g(x)} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$$

$$-|x| \xrightarrow{x \to 0} 0 \qquad |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\frac{f'}{g'} = ?$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2}$$

$$g' = 1 \qquad \left(g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \right)$$

$$f'(x) = \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + $$

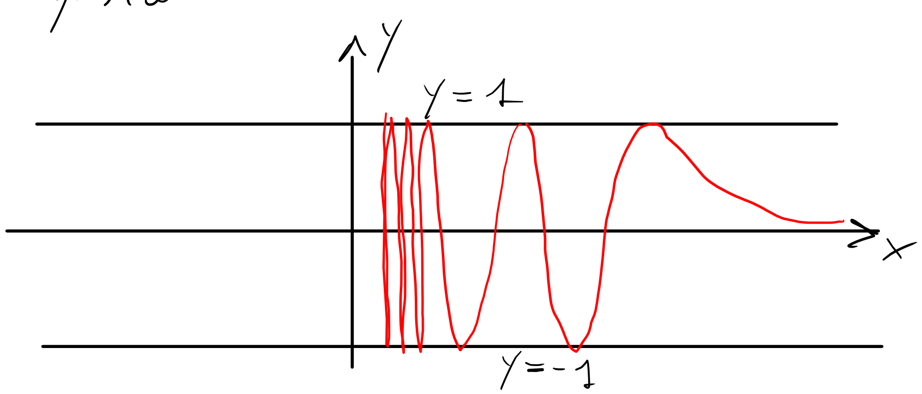
$$+ x^2 \underbrace{\cos'\left(\frac{1}{x}\right)}_{-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \atop 0} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \qquad y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \operatorname{sen}(y)$$ che non esiste



In questo esempio $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

mentre $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste

Teorema (Terza regola Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$)

Sia I un intervallo x_0 un punto di accumulazione di I (anche $x_0 = \pm\infty$), $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ e t.c.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty .$$

Allora se esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L .$$

Supponiamo già che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)\, \cancel{x}^{n-2}}{e^x}$$

$$= \dots \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot \dots \cdot 2}^{n!}\, x}{e^x}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

$$x^n = o(e^x) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left((x^2+1)^{\frac{1}{2}} \right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\cancel{2}} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2}x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{2}} (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2} x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad y = \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{y \to 0} (1+y)^{-\frac{1}{2}} = (1+0)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \lg x \qquad 0 \cdot +\infty$$

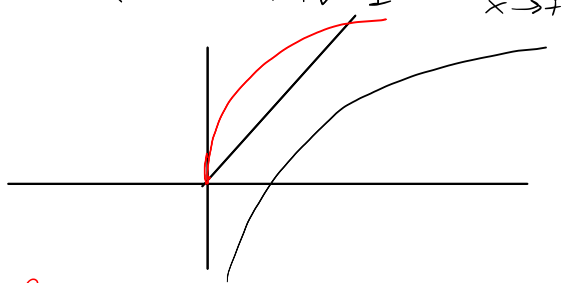
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\lg x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\lg x}{x^{-1}} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1 \; x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{x^{-2}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{-1}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$0 = \lim_{x\to +\infty} \frac{\lg x}{x^{0,0001}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{0,0001} = \lim_{x\to +\infty} e^{\lg\left(x^{0,0001}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{0,0001 \lg x} \qquad y = \lg x$$

$$= \lim_{y\to +\infty} e^{0,0001\, y} \qquad z = 0,0001\, y$$

$$= \lim_{z\to +\infty} e^{z} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\lg x)'}{\left(x^{0,0001}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^{-1}}}{0,0001\, x^{-1+0,0001}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{0,0001\, \underbrace{x^{0,0001}}_{\to +\infty}} = 0$$

Derivate di ordine superiore

Def Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ I un intervallo.
Supponiamo che in ogni $x \in I$ esista $f'(x) = f^{(1)}(x)$
$= \frac{d}{dx} f(x)$

Resta definita una nuova funzione $f': I \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che in un punto $x_0 \in I$
esista $(f')'(x_0)$

La chiameremo la derivata seconda di f nel punto x_0 e la denoterò
$$f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x_0)$$

Supponendo per induzione di avere definito la derivata di ordine n $f^{(n)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$,
se questa è definita in tutti i punti di I,
resta definita $f^{(n)}: I \longrightarrow \mathbb{R}$, se
esiste $(f^{(n)})'(x_0)$ in un punto $x_0 \in I$
la chiameremo la derivata di ordine $n+1$ di f nel punto x_0 e la denoterò con
$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x_0) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x_0).$$

Def Se I è un intervallo ed $n \in \mathbb{N}$ con $C^n(I)$ denoto l'insieme delle funzioni $I \to \mathbb{R}$ che ammettono derivate fino all'ordine n su tutti i punti di I e tali che tutte le derivate fino all'ordine n sono continue in I.

$C^\infty(I)$ è l'insieme delle funzioni che ammettono derivate di qualsiasi ordine in I. Questi insiemi sono spazi vettoriali:

Notare che $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0) + \mu g^{(n)}(x_0)$
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

$x > 0 \qquad a \in \mathbb{R}$. Vole

$$(x^a)^{(n)} = \left(\prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\right) x^{a-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostriamo per induzione su n:

$n=1$

$$(x^a)^{(1)} = (x^a)' = a\, x^{a-1}$$

$$\prod_{j=1}^{1} (a-j+1) \quad x^{a-1} = (a-1+1)\, x^{a-1} = a\, x^{a-1}$$

$n \Rightarrow n+1$

$$(x^a)^{(n+1)} = \left((x^a)^{(n)}\right)' = \left(\prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n}\right)'$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (a-j+1) \quad (x^{a-n})'$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (a-j+1) \quad (a-n) \quad x^{a-n-1}$$

$$= \prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1) \quad x^{a-n-1}$$

$x > 0$ $a \in \mathbb{R}$. Vale

$$(x^a)^{(n)} = \left(\prod_{j=1}^{n} (a - j + 1) \right) x^{a-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $a = n$

$$(x^n)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (n - j + 1) = n!$$

$m > n$

$$(x^n)^{(m)} = \prod_{j=1}^{m} (n - j + 1) \quad x^{n-m}$$

$$= n(n-1) \cdots (n - m + 1) \; x^{n-m}$$

$$= \underbrace{n (n-1) \cdots (n+1-m)}_{0} \; x^{n-m}$$