

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ PER LE ASSICURAZIONI E LA FINANZA

Laurea Magistrale in
Scienze Statistiche e Attuariali
Università degli Studi di Trieste

Calcolo delle Probabilità

- Argomenti:
 - ▶ Spazi di probabilità; probabilità condizionata e indipendenza
 - ▶ Variabili aleatorie e misurabilità
 - ▶ Legge di variabili aleatorie multivariate
 - ▶ Speranza matematica, varianza, covarianza
 - ▶ Speranza matematica condizionata
 - ▶ Convergenza e teoremi limite
 - ▶ Processi stocastici

Calcolo delle Probabilità

- Testi per il corso

- ▶ *Probability - An Introduction*, G. Grimmett, D. Welsh, OUP, 2a edizione, 2014
~> di base, copre adeguatamente il programma del corso
- ▶ *Probability and Random Processes*, G. Grimmett, D. Stirzaker, OUP, 3a edizione, 2001
~> molto ampio, la prima metà copre il corso mentre il resto si concentra su processi stocastici; numerosi esercizi (più *One Thousand Exercises in Probability* degli stessi autori)
- ▶ *Probability Essentials*, J. Jacod, P. Protter, Springer, 2a edizione, 2004
~> conciso ma matematicamente rigoroso

Spazi di Probabilità

Calcolo delle Probabilità

- Modello matematico per la descrizione e valutazione dell'incertezza
 - ▶ approccio assiomatico basato sulla *Teoria della Misura*
 - ▶ eventi $\equiv$ insiemi, probabilità $\equiv$ misura
 - ▶ approccio non “costruttivo”

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 1) Ω = insieme di possibili **risultati** di un **esperimento**
 - ▶ elementi (risultati): $\omega \in \Omega$
 - ▶ ω = **stato del mondo/stato di natura**
 - ▶ una volta che l'esperimento è terminato, **uno e uno solo** $\omega^* \in \Omega$ sarà verificato

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) $\mathcal{F}$ = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ evento: **sottoinsieme di** Ω , se $A \in \mathcal{F}$ allora $A \subset \Omega$
 - ▶ evento: ente logico che può essere vero (V) o falso (F)
 - ▶ se ω^* si verifica, allora A è V o F se $\omega^* \in A$ o $\omega^* \notin A$

Spazi di Probabilità

- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 2) $\mathcal{F}$ = insieme di eventi **di interesse per l'esperimento**
 - ▶ $\mathcal{F}$ rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il **valore logico** di ogni evento in $\mathcal{F}$ verrà rivelato alla fine dell'esperimento
 - ▶ non necessariamente ogni sottoinsieme di Ω è in $\mathcal{F}$ (è un evento)
 - ▶ la scelta di $\mathcal{F}$ è guidata da natura del problema e convenienza matematica

Spazi di Probabilità

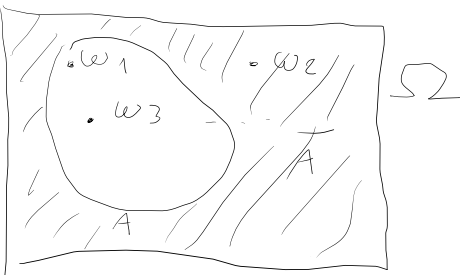
- Modello matematico: costituito da 3 elementi
- 3) P **probabilità**: per ogni evento $A \in \mathcal{F}$, un numero

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- ▶ $P(A)$: misura di fiducia che A sia V (prima dell'esperimento)
- ▶ se $P(A) = 0$: è "**quasi certo**" che A sia F
- ▶ se $P(A) = 1$: è "**quasi certo**" che A sia V
- ▶ $P(A) > P(B)$: l'evento A è più probabile di B

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi ($\rightsquigarrow$ diagrammi di Venn)
 - ▶ $\Omega = \text{“universo”} = \text{evento certo}$: sempre V
 - ▶ $\emptyset = \text{insieme vuoto} = \text{evento impossibile}$: sempre F
 - ▶ $A^c = \bar{A} = \text{complementare di } A = \text{“non } A\text{”}$: V/F se e solo se A è F/V



A	$\bar{A}$
V	F
F	V

Eventi e Insiemi

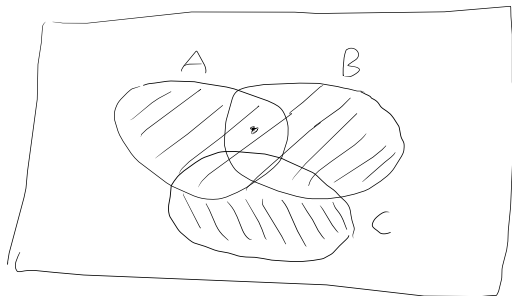
- Corrispondenza tra eventi e insiemi

▶ $A \cup B =$ unione di A e $B =$ “ $A \circ B$ ”: V se A è V $\circ$ B è V
 $\rightsquigarrow$ unione non esclusiva!

▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **almeno uno** degli A_α è V



A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Eventi e Insiemi

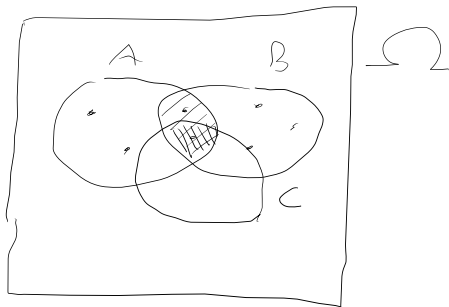
- Corrispondenza tra eventi e insiemi

- ▶ $A \cap B =$ intersezione di A e $B =$ “ A e B ”: V se A è V e B è V

- ▶ per una famiglia di insiemi $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$, con I insieme di indici,

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

è V se **ognuno** degli A_α è V



A	B	$A \cap B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi

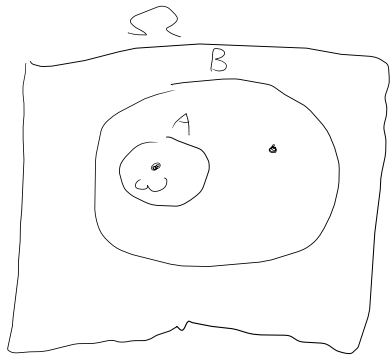
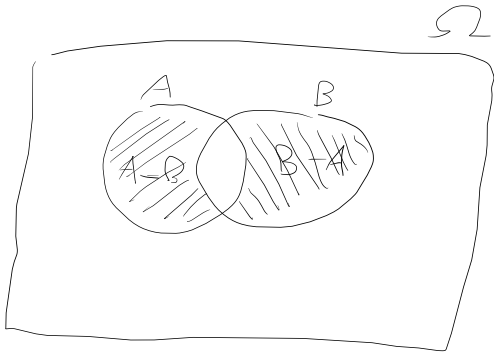
$$\underbrace{A \cap \overline{B}}$$

- ▶ $A - B = A \text{ meno } B = \text{"A e non B"}: V \text{ se } A \text{ è } V \text{ e } B \text{ è } F$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

- ▶ $A \Delta B = \text{differenza simmetrica di } A \text{ e } B = \text{A o B, ma non entrambe}: V \text{ se } A \text{ è } V \text{ e } B \text{ è } F, \text{ o viceversa} \rightsquigarrow \text{unione esclusiva}$

- ▶ inclusione tra insiemi $A \subset B$: se $A \text{ è } V \text{ allora } B \text{ è } V$



$$A \cap B \quad C \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} C \quad A \cup B$$

Eventi e Insiemi

- Corrispondenza tra eventi e insiemi
 - ▶ A e B sono **disgiunti** se $A \cap B = \emptyset$: A e B sono **incompatibili** $\rightsquigarrow$ non si possono verificare entrambi
- Gli eventi di una famiglia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono
 - ▶ **a due a due disgiunti** se

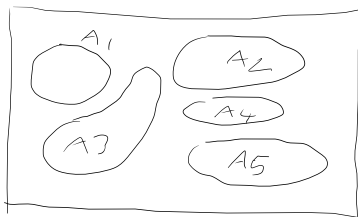
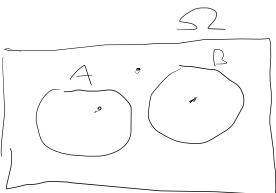
$$A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

per ogni $\alpha \neq \beta \rightsquigarrow$ **al più uno** degli eventi è V

- ▶ **esaustivi** se

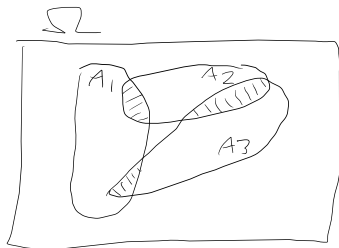
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$$

$\rightsquigarrow$ **almeno uno** degli eventi è V



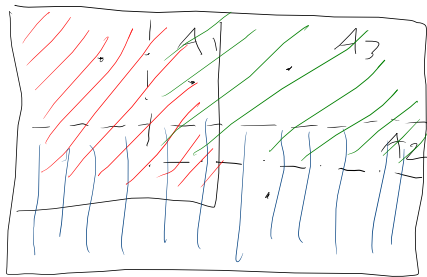
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$$

$$I = \{1, 2, 3\}$$



$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$$

Ω



Eventi e Insiemi

- **Partizione** di Ω : una famiglia di eventi $\mathbb{P} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ tale che
 - ▶ $A_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in I$
 - ▶ a due a due disgiunti
 - ▶ esaustivi
- Una partizione permette di rappresentare l'incertezza in eventi incompatibili di cui uno sicuramente si verifica ("puzzle")
- Caso tipico: $\mathbb{P}$ **discreta** ($\equiv$ finita o numerabile)

Ω



Spazi di Probabilità

- Modello per esperimenti combinati/ripetuti: **spazio prodotto** (prodotto cartesiano)
 - ▶ esperimento 1 (Ω_1) seguito da esperimento 2 (Ω_2) ... seguito da esperimento n (Ω_n):

$$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ esperimento ripetuto n volte ($\Omega_i = \Omega$ per ogni i):

$$\Omega^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega, i = 1, \dots, n\}$$

- ▶ i risultati di un esperimento **non influenzano** gli esiti degli altri
- ▶ **sequenza infinita** di esperimenti: e.g. $\Omega^\infty \equiv \Omega^{\mathbb{N}}$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{ \underbrace{(\omega_1, \omega_2)}_{\substack{\text{NUOVO} \\ \text{STATO DEL} \\ \text{MONDO}}} \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \}$$

$$\Omega \times \Omega = \Omega^2 = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$$

$$\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}$$

$$\Omega_2 = \{T, C\}$$

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(i, L) \mid 1 \leq i \leq 6, \begin{matrix} L = T \\ \text{or} \\ L = C \end{matrix}\}$$

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ lancio di una moneta
 - ▶ lancio di un dado
 - ▶ lancio di due/ n / ∞ monete
 - ▶ lancio di un dado seguito da un lancio di una moneta
 - ▶ lancio un dado e poi lancio una moneta tante volte quanto è il risultato del dado
 - ▶ estrazione di 5 carte da un mazzo di 52
 - ▶ partita di calcio

$$\Omega = \{T, C\}$$

$$\Omega^n = \{(L_1, L_2, \dots, L_n) \mid L_i = T \text{ or } L_i = C\} \quad 2^n$$

$$TTCTCCTTTC \in \Omega^n$$

$$n=10$$

$$\Omega^\infty = \{(L_1, L_2, \dots, L_n, \dots) \mid L_i = T \text{ or } L_i = C\}$$

$$TTCTTCCCTCT \dots \in \Omega^\infty$$

LANCIO DADO, POI LANCIO MONETA TANTE VOLTE
QUANTO VALE IL DADO

$$\Omega = \left\{ (i, L_1 L_2 \dots L_i) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 6 \\ L_q = T \text{ o } L_q = C \end{array} \right\}$$

5 CARTE DA MAZZO DI 52

$$M = \{1C, \dots, 13C, 1Q, \dots, 13Q, 1F, \dots, 13F, \\ 1P, \dots, 13P\}$$

ORDINATE

$$\Omega = \{(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) \mid E_i \in M, E_i \text{ DISTINTI}\}$$

$$(5P, 3Q, 13C, 11P, 1F) \in \Omega$$

$$52_5 = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$$

NON ORDINATE

$$\Omega = \{ \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \mid e_i \in M, e_i \text{ tutti distinti} \}$$

$$\binom{52}{5} = \frac{(52)_5}{5!}$$

PARTITA DI CALCIO

$$\Omega = \{1, X, Z\}$$

$$\Omega = \{ (i, T) \mid \begin{array}{l} i = \# \text{ GOL SQUADRA DI CASA } \{ \\ T = \text{ " " " IN TRASFERITA } \end{array} \right. \\ i, T \in \mathbb{N} \quad \} = \mathbb{N}^2$$

$$\Omega = \{ (i_1, i_2, T_1, T_2) \mid \begin{array}{l} i_1 \leq i_2 \\ T_1 \leq T_2 \end{array} \} \\ \begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \downarrow \\ \underbrace{1^{\text{O}} \text{ TEMPO FINALE}}_{\text{CASA}} \quad \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{TRASFERITA}} \end{array}$$

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare ognuno dei seguenti esperimenti
 - ▶ prezzo di una azione/ n azioni
 - ▶ numero di sinistri in un portafoglio di n contratti
 - ▶ numero di sinistri e danno totale in un portafoglio assicurativo
 - ▶ prezzo di una azione nel tempo
 - ▶ durata di vita alla nascita di un individuo/ n individui
- esempi di eventi incompatibili, esaustivi, unione, intersezione, differenza, ...

$$\Omega = (0, +\infty) \quad 0 \quad \Omega = [0, +\infty)$$

$\uparrow$
 FALTIMENTO

$$n \text{ TITOLI} \quad (0, +\infty)^n$$

RCA

$$\Omega = \mathbb{N}^n$$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}^n$$

$$\{0, 1\}^n$$

~~$$\mathbb{N} \times [0, +\infty)$$~~

$$\Omega = \{(i, x) \mid i \in \mathbb{N}, x \geq 0, x=0 \Rightarrow i=0\}$$

PREZZO DI UNA AZIONE NEL TEMPO

$$\Omega = (0, +\infty)^n \quad \text{SU } n \text{ GIORNI}$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i > 0\}$$

Spazi di Probabilità

- Definizione formale di **spazio di probabilità** (assiomi di Kolmogorov, 1933): una tripla

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

con

- 1 Ω : insieme non vuoto $\rightsquigarrow$ risultati possibili
- 2 $\mathcal{F}$: σ -algebra di sottoinsiemi di Ω $\rightsquigarrow$ eventi di interesse
- 3 P **probabilità** su $(\Omega, \mathcal{F})$ $\rightsquigarrow$ misura dell'incertezza

Spazi di Probabilità

- $\mathcal{F}$ è una **σ -algebra** di sottoinsiemi di Ω (gli elementi di $\mathcal{F}$ sono sottoinsiemi di Ω):

▶ [$\mathcal{F}1$] $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

▶ [$\mathcal{F}2$, chiusura per **complementazione**]
per ogni $A \in \mathcal{F}$ anche $\bar{A} \in \mathcal{F}$

▶ [$\mathcal{F}3$, chiusura per **unioni/intersezioni numerabili**]
per ogni successione $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ di eventi in $\mathcal{F}$, allora

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Spazi di Probabilità

- La coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ è uno **spazio misurabile**;
una **probabilità** P su $(\Omega, \mathcal{F})$ è una applicazione

$$P : \underline{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$$

tale che

$$A \in \mathcal{F} \longrightarrow P(A) \in [0, 1]$$

- ▶ $[P1, \text{misura unitaria}]$ $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- ▶ $[P2, \sigma\text{-additività}]$ per ogni successione $(A_n)_{n \geq 1}$ di eventi **a due a due disgiunti** in $\mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

SERIE INFINITA

- Se $P(A) = 1$, A è **quasi certo** (si scrive A q.c.)

Spazi di Probabilità

- ESERCIZIO. Rappresentare come spazi di probabilità i seguenti esempi

▶ lancio di una moneta

▶ lancio di un dado

▶ come σ -algebra, utilizzare l'insieme delle parti di Ω

INSIEME POTENZA

$$2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$$

[tutti i sottoinsiemi di Ω]

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\mathcal{P} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \{5, 6\}, \dots, \Omega\} \quad 2^6 \text{ ELEMENTI}$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$1 = P(\underbrace{\{1\} \cup \dots \cup \{6\}}_{\Omega} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) + 0 + 0 + 0, \dots$$

$$A = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) \\ &= P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\#A}{n} \end{aligned}$$

$$\Omega = \{T, C\}$$

$$\mathcal{F} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \Omega\}$$

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$$

$$1 = P(\underbrace{\{T\} \cup \{C\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \dots}_{\Omega}) \stackrel{?}{=} \underbrace{P(\{T\})}_{1/2} + \underbrace{P(\{C\})}_{1/2} + \underbrace{P(\emptyset)}_0 + \dots = 1$$

σ -Algebra

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$$

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$$

- Nella definizione di σ -algebra

$$\overline{\emptyset} = \Omega \quad \overline{\Omega} = \emptyset$$

- ▶ in $[\mathcal{F}1]$ basta richiedere che $\emptyset \in \mathcal{F}$ oppure che $\Omega \in \mathcal{F}$ oppure che $\mathcal{F}$ sia non vuoto

- ▶ in $[\mathcal{F}3]$ basta richiedere che $\mathcal{F}$ sia chiuso rispetto a unioni numerabili oppure a intersezioni numerabili $\rightsquigarrow$ formule di **de Morgan**

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

- Ogni σ -algebra è chiusa per unioni o intersezioni **finite**

σ -Algebra

- Perché si richiedono $[\mathcal{F}1]$, $[\mathcal{F}2]$, $[\mathcal{F}3]$?
 - ▶ l'evento certo e quello impossibile sono sicuramente noti
 - ▶ se A è noto a esperimento terminato, tale sarà $\bar{A}$
 - ▶ se $A_1, \dots, A_n$ sono eventi rivelati noti alla fine dell'esperimento, tali saranno

$$A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad A_1 \cap \dots \cap A_n$$

estendere questa proprietà a successioni numerabili è fatto per
convenienza matematica

- Ogni operazione (finita o numerabile) su eventi di una σ -algebra dà come risultato eventi della σ -algebra

σ -Algebra

- Esempi di σ -algebra

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega \rightsquigarrow$ la più **grande** σ -algebra su Ω , σ -algebra **discreta**

- ▶ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \rightsquigarrow$ la più **piccola** σ -algebra su Ω , σ -algebra **triviale**

- ▶ se $A \subset \Omega$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$

- Ogni σ -algebra $\mathcal{F}$ su Ω è tale che

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F} \subset 2^\Omega$$

σ -Algebra

- $\mathcal{F}$ rappresenta l'**informazione** ottenibile dall'esperimento $\rightsquigarrow$ il **valore logico** di ogni evento (in $\mathcal{F}$) verrà rivelato alla fine dell'esperimento $\rightsquigarrow$ più grande è $\mathcal{F}$, maggiore l'informazione
 - ▶ σ -algebra triviale $\rightsquigarrow$ **nessuna** informazione
 - ▶ σ -algebra discreta $\rightsquigarrow$ **massima** informazione
- $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ σ -algebre su Ω
 - ▶ $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ ha più informazione di $\mathcal{G}$
 - ▶ $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ è una σ -algebra $\rightsquigarrow$ informazione **in comune** tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$
 - ▶ $\mathcal{G} \cup \mathcal{F}$ **non è** in generale una σ -algebra

$$\Omega = \{1, x, 2\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{x, 2\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1, x\}\}$$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \overset{\downarrow}{\{1\}}, \overset{\downarrow}{\{x, 2\}}, \{2\}, \{1, x\}\} \quad \begin{array}{l} \text{NON } \in \\ \text{UNA} \\ \sigma\text{-ALGEBRA} \end{array}$$

$$\{x, 2\} \cap \{1, x\} = \{x\} \quad \text{NON APPARTIENE}$$

- ESERCIZIO. Partita di calcio: $\Omega = \{1, X, 2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1$ = informazione di chi osserva (solo) se la squadra di casa ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_2$ = informazione di chi osserva (solo) se la squadra in trasferta ha vinto o meno
 - ▶ descrivere $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
 - ▶ verificare che $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ non è una σ -algebra

σ -Algebre

- Più in generale, se $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ è una famiglia arbitraria di σ -algebre su Ω , tale è

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \quad \checkmark$$

- σ -algebra generata da un insieme $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di Ω

- ▶ come costruire una σ -algebra che contiene gli eventi in $\mathcal{C}$ “e niente altro”?
- ▶ costruzione “da fuori” utilizzando il risultato precedente

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{C} \subset \mathcal{G} \}$$

$\mathcal{F}_\alpha$ σ -ALGEBRA $\alpha \in \mathcal{I} \Rightarrow$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha}_{= \mathcal{F}}$$

 $\bar{\mathcal{F}}$

UNION

 σ -ALGEBRA

[71] $\phi \in \mathcal{F}$? s., $\phi \in \mathcal{F}_\alpha$ PER SOME α

[72] $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$?

$\hookrightarrow A \in \mathcal{F}_\alpha$ PER SOME α

$\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}_\alpha$ " " "

$\Rightarrow \bar{A} \in \bigcap_{\alpha} \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$

$$[73] \quad A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$$

$$A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_n \in \mathcal{F}_\alpha \quad \text{per ogni } \alpha, \text{ per ogni } n$$

$$\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_\alpha \quad \text{per ogni } \alpha$$

$$\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$$

σ -Algebra

- La σ -algebra generata da $\mathcal{C}$ può essere caratterizzata come l'unico insieme di eventi $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ tale che
 - ▶ $\mathcal{F}$ è una σ -algebra
 - ▶ $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$
 - ▶ per ogni altra σ -algebra $\mathcal{G}$ tale che $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, riesce $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

σ -Algebra

- Quindi la σ -algebra generata da $\mathcal{C}$
 - ▶ è la più piccola σ -algebra che contiene $\mathcal{C}$
 - ▶ contiene tutti gli insiemi costruibili partendo da quelli di $\mathcal{C}$ (con operazioni numerabili)
- A parte alcuni casi “semplici”, non è in generale possibile descrivere gli insiemi di $\sigma(\mathcal{C})$
- Come definire la condivisione (unione) delle informazioni?

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$$
$$\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$$

$$\mathcal{C} = \{A, B\} \quad \sigma(\mathcal{C})$$

- Tre proprietà (ovvie) della σ -algebra generata

▶ $\mathcal{F}$ σ -algebra $\iff \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$

▶ $\mathcal{F}$ σ -algebra, $\mathcal{C} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$

▶ $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega\}$$

- ESERCIZIO. Chi è $\sigma(\mathcal{C})$ quando (i) $\mathcal{C} = \emptyset$ (ii) $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$ (iii) $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ (iv) $\mathcal{C} = \{A\}$ con $\emptyset \neq A \neq \Omega$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$$

- **Partizione generata** da una famiglia di insiemi

▶ se $\mathcal{C} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$, la partizione generata da $\mathcal{C}$ è

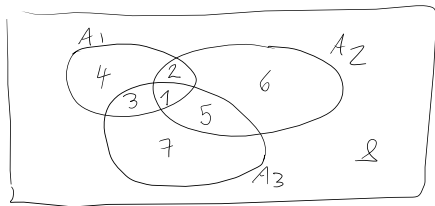
$$\mathbb{P}_G(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} A'_\alpha \neq \emptyset \mid A'_\alpha = A_\alpha \text{ o } A'_\alpha = \overline{A_\alpha}, \text{ per ogni } \alpha \in I \right\}$$

- ▶ $\mathbb{P}_G(\mathcal{C})$: partizione meno fine per cui ogni insieme di $\mathcal{C}$ si può ottenere come unione di suoi insiemi
- ▶ $\mathbb{P}_1$ è più fine di $\mathbb{P}_2$ se ogni insieme di $\mathbb{P}_2$ è unione di insiemi di $\mathbb{P}_1$

$$\mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{C}) = \left\{ \underbrace{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}}_{(1)}, \underbrace{A_1 A_2 \overline{A_3}}_{(2)}, \underbrace{A_1 \overline{A_2} A_3}_{(3)}, \underbrace{A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}}_{(4)}, \right. \\ \left. \underbrace{\overline{A_1} A_2 A_3}_{(5)}, \underbrace{\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}}_{(6)}, \underbrace{\overline{A_1} \overline{A_2} A_3}_{(7)}, \underbrace{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}}_{(8)} \right\}$$



$$A_2 = (1) \cup (2) \cup (5) \cup (6)$$

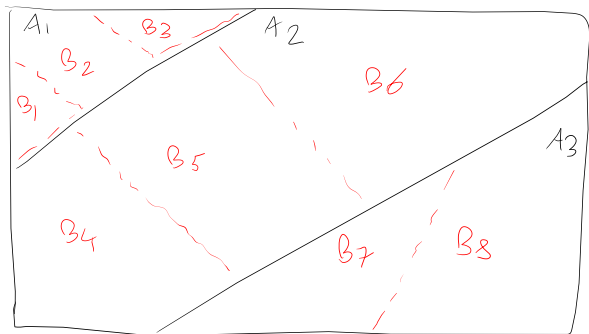
$\sigma(\mathcal{C}) \quad \mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3\}$

- $A_1 \subset A_2 \subset A_3$

- A_1, A_2, A_3 A OUE A OUE DISGIUNTI

TROVARE $P_G(\mathcal{C})$ IN QUESTI DUE CASI

$$A_2 = B_4 \cup B_5 \cup B_6$$



$$P_1 = \{B_1, \dots, B_8\}$$

$$P_2 = \{A_1, A_2, A_3\}$$

σ -Algebre

- Caso in cui si riesce a descrivere la σ -algebra generata

▶ Se $\mathbb{P} = (A_n)_{n \geq 1}$ è una partizione discreta, allora $(\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\})$

$$\sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N}_+ \right\}$$

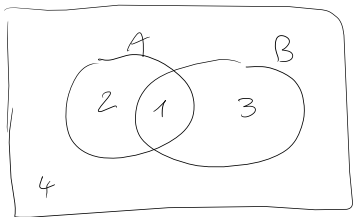
▶ Se $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ insieme finito, riesce

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}))$$

- ESERCIZIO. Descrivere $\sigma(\{A, B\})$ con (i) A, B “generici” (ii) $A \subset B$ (iii) A, B incompatibili

$$\mathcal{C} = \{A, B\} \quad \sigma(\mathcal{C})?$$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\mathcal{C}))$$



$$\mathbb{P}_G(\mathcal{C}) = \left\{ \underset{(1)}{AB}, \underset{(2)}{A\bar{B}}, \underset{(3)}{\bar{A}B}, \underset{(4)}{\bar{A}\bar{B}} \right\}$$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\{ \underset{(1)}{AB}, \underset{(2)}{A\bar{B}}, \underset{(3)}{\bar{A}B}, \underset{(4)}{\bar{A}\bar{B}} \}) =$$

$$= \{ \emptyset, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B},$$

$$A, B, AB \cup \bar{A}\bar{B}, A \Delta B, \bar{B}, \bar{A},$$

$$A \cup B, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B, \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\Omega \}$$

- ESERCIZIO. Modello binomiale: il prezzo di un titolo, in ogni periodo, può salire o scendere di $u\%$, $d\%$; descrivere

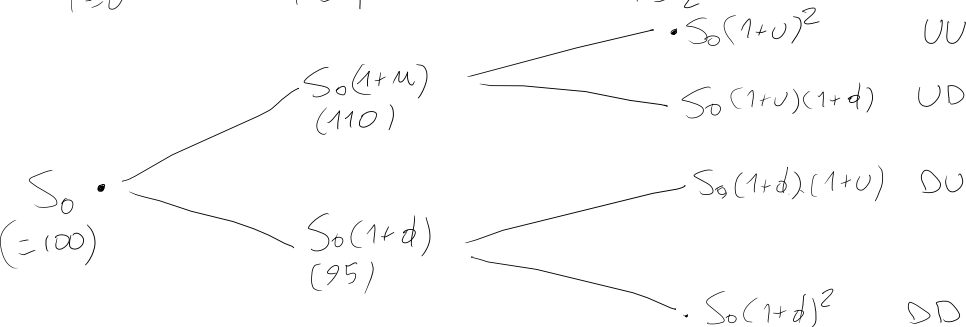
+10% -5%

- ▶ uno spazio di probabilità adatto a rappresentare il movimento del prezzo su due periodi (tre date 0, 1, 2)
- ▶ le partizioni e le corrispondenti σ -algebre per chi osserva il prezzo per uno o due periodi
- ▶ la partizione e σ -algebra di chi osserva il prezzo al tempo due

ODGI
 $T=0$

ODMAN
 $T=1$

ODPO OAMANI
 $T=2$



$$\Omega = \{UU, UD, DU, DD\}$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \overbrace{\{UU, UD\}, \{DU, DD\}}^{\text{PARTIZIONE}}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = 2^\Omega$$

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$$

$$\searrow \{UU\}, \{UD\}, \{DU\}, \{DD\} \quad \text{PARTIZIONE}$$

OSSERVATORE CHE VEDÉ SOLO IL PREZZO ALLA
DATA 2

PARTIZIONE

$$\mathcal{Y} = \{\phi, \Omega, \overbrace{\{UU\}, \{DD\}, \{UD, DU\}}, \\ \{UU, DD\}, \{UU, UD, DU\}, \{DD, UD, DU\} \}$$

σ -Algebra

- σ -Algebra di Borel in $\mathbb{R}$

- ▶ su $\Omega = \mathbb{R}$, si considera la σ -algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ dove

$$\mathcal{C} = \{\text{intervalli di } \mathbb{R}\}$$

- ▶ $\mathcal{B}$ contiene ogni insieme ottenibile dagli intervalli tramite unioni, intersezioni (numerabili), complementazioni, ...
- ▶ ogni insieme di interesse pratico è in $\mathcal{B}$, tuttavia $\mathcal{B} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$
- ▶ insiemi in $\mathcal{B}$: **boreliani**

$$(1, 2) \cup (5, 7] \cup [10, +\infty) \in \mathcal{B}$$

$$\overline{[-1, 2]} = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty) \in \mathcal{B}$$

$$\{10\} = [10, 10]$$

$$\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{14\} \cup \{-14\} \cup \dots \in \mathcal{B}$$

σ -Algebra

- Riesce $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_i) \ i = 1, \dots, 5$ con

- ▶ $\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_2 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_4 = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

- ▶ $\mathcal{C}_5 = \{\text{insiemi aperti di } \mathbb{R}\}$

- Altre scelte di insiemi generatori sono possibili

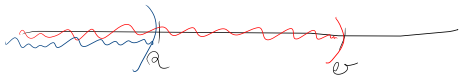
$$\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\{\text{INTERVALLI}\})$$

$$\mathcal{C}_1 \subset \{\text{INTERVALLI}\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}$$

L'INCLUSIONE OPPOSTA SI GIUSTIFICA
VERIFICANDO CHE OGNI INTERVALLO SI
PUÒ OTTENERE DA QUELLI IN $\mathcal{C}_1$ TRAMITE
LE SOLITE OPERAZIONI

$$\overline{(-\infty, a)} = [a, +\infty) \in \sigma(\mathcal{L}_1)$$

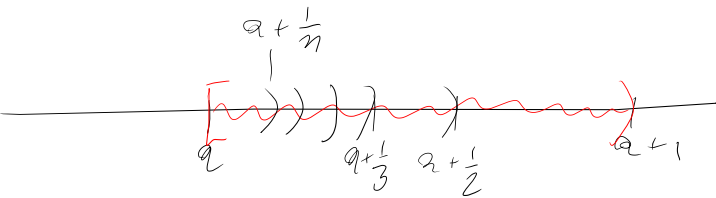
$$a < b \quad (-\infty, b) - (-\infty, a) = [a, b) \in \sigma(\mathcal{L}_1)$$



$$? \quad (a, +\infty) = [a, +\infty) - \{a\} \in \sigma(\mathcal{L}_1)$$

$$\{a\} = [a, a+1) \cap [a, a+\frac{1}{2}) \cap [a, a+\frac{1}{3}) \cap \dots \cap [a, a+\frac{1}{n}) \cap \dots$$

$$\in \sigma(\mathcal{L}_1)$$





- σ -Algebra di Borel in $\mathbb{R}^n$, indicata con $\mathcal{B}^n$

► $\mathcal{B}^n \equiv \mathcal{B}^{\otimes n} \equiv \mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}$ cioè

$$\mathcal{B}^n = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{B}\})$$

- si può mostrare che $\mathcal{B}^n$ è generata da **iper-rettangoli (limitati o illimitati)**

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^n &= \sigma(\{(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \mid a_i \in \mathbb{R}\}) \\ &= \sigma(\{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\})\end{aligned}$$

- ogni insieme di interesse pratico è in $\mathcal{B}^n$, tuttavia $\mathcal{B}^n \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$
- insiemi in $\mathcal{B}^n$: **boreliani**

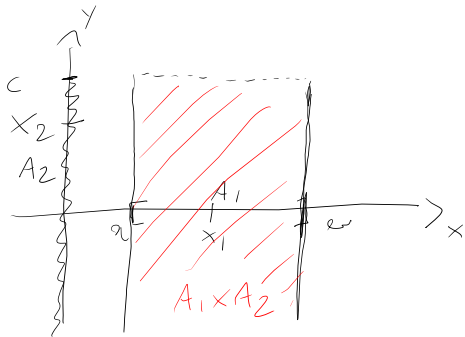
$$A_1 \times A_2 = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \}$$

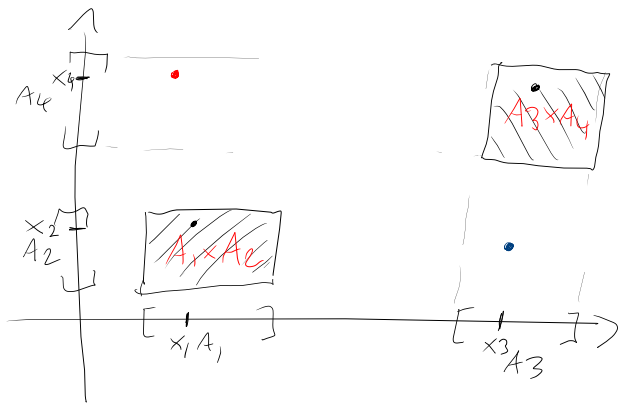
$$n = 2$$

PRODUCT
CARTESIANO

$$A_1 = [a, b]$$

$$A_2 = (-\infty, c]$$





(x_1, x_4) •

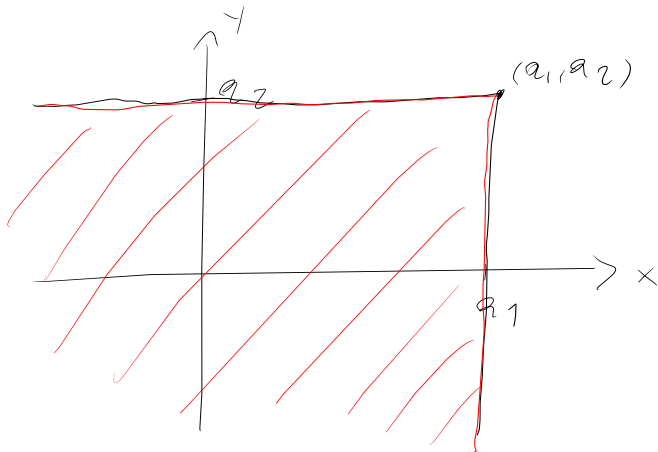
(x_3, x_2) •

NON STANNO IN

$$(A_1 \times A_2) \cup (A_3 \times A_4) \leftarrow$$

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2]$$

UB²



Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A, B \in \mathcal{F}$
 - ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A, B incompatibili
 - ▶ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - ▶ [monotonia] se $A \subset B$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

e quindi $P(A) \leq P(B)$

- ▶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A_1 \text{ --- } A_n \quad A \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad \text{DISJUNCTI}$

$$P(A_1 \cup \text{---} \cup A_n) =$$

$$= P(A_1 \cup \text{---} \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \text{---})$$

σ -ADDITIVITÀ

$$= P(A_1) + \text{---} + P(A_n) + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \text{---} + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \text{---}$$

$$= P(A_1) + \text{---} + P(A_n)$$

$$P(\underbrace{A \cup \bar{A}}_{\Omega}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$P(\Omega)$$

"

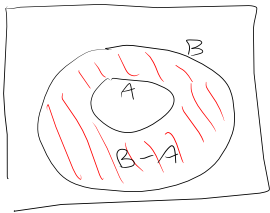
1

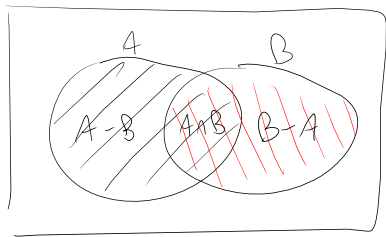
$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$\hookrightarrow \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} = P(B) - P(A)$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B - A)) \\ &= P(A) + P(B - A) \end{aligned}$$

DISGIUNTI





$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

A DISJOINT A DISJOINT

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A - B) + P(A \cap B)}_{= P(A)} + \underbrace{P(B - A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B)$$

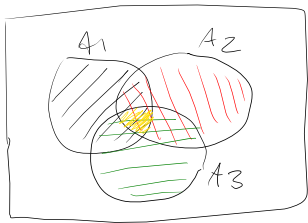
A_1, A_2, A_3

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$



Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$
 - ▶ [finita additività] se $A_1, \dots, A_n$ sono a due a due disgiunti

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

- ▶ [formula di inclusione-esclusione]

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ & \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Dimostrazione per induzione della formula
di inclusione-esclusione

$n=2$ ok

Se la proprietà è vera per n eventi
(qualunque), allora è vera per $(n+1)$

$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1})}_{*} = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i < j}^{1 \dots n+1} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})$$

$$* = P(A_1 \cup \underbrace{\quad \cup A_n}_{=A} \cup A_{n+1}) = P(A \cup A_{n+1})$$

$$= P(A) + P(A_{n+1}) - P(A \cap A_{n+1})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n P(A_i)}_{\text{red box}} - \sum_{\substack{i < j \\ \text{blue wavy line}}}^{1 \sim n} P(A_i \cap A_j) \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ + P(A_{n+1}) - P(A \cap A_{n+1})$$

☒

$$P(A \cap A_{n+1}) = P((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1})$$

$$\boxtimes \quad = P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{i < j}^{1, \dots, n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})$$

$$\dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1})$$

Proprietà della Probabilità

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ successione di eventi
 - ▶ (A_n) è **monotona non decrescente** se $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni n ; si pone $\lim_n A_n = \cup_n A_n$ e si scrive $A_n \uparrow A$
 - ▶ (A_n) è **monotona non crescente** se $A_n \supset A_{n+1}$ per ogni n ; si pone $\lim_n A_n = \cap_n A_n$ e si scrive $A_n \downarrow A$
 - ▶ **[monotonia/continuità dal basso/alto]** se (A_n) è monotona

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$$

- ▶ **[subadditività]**

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

potrebbe essere
divergente

$$\Omega = \mathbb{R}$$

$$- A_n = (-\infty, n) \quad n \geq 0$$

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

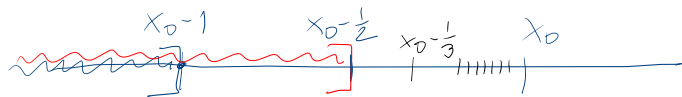
$$\lim_n A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n = \mathbb{R}$$

$$- B_n = (-\infty, x_0 + \frac{1}{n}] \quad n \geq 1$$

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

$$\lim_n B_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n = (-\infty, x_0]$$

$$C_n = (-\infty, x_0 - \frac{1}{n}] \quad n \geq 1$$



$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$$

$$\lim C_n = \bigcup_{n \geq 1} C_n = (-\infty, x_0)$$

$$(A_n)_{n \geq 1}$$

NON DECRESCENTE

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3$$

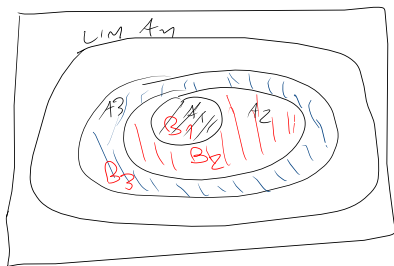
$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$B_3 = A_3 - A_2$$

$$B_n = A_n - A_{n-1}$$

A DUE A DUE DISGIUNTI



σ -ADDITIVITY:

$$P\left(\underbrace{\bigcup_{n \geq 1} B_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n P(B_i)} =$$

$$\underbrace{\bigcup_{n \geq 1} A_n}_{\lim_n A_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) =$$

$$P(B_2) = \begin{aligned} & \rightarrow \cancel{P(A_1)} + \\ & \quad \cancel{P(A_2)} - \cancel{P(A_1)} + \\ & \quad \cancel{P(A_3)} - \cancel{P(A_2)} + \\ & \quad \dots \\ & \quad \boxed{P(A_n)} - \cancel{P(A_{n-1})} \end{aligned}$$

(A_n) MONOTONA NON CRESCENTE

$$A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$$

$(\overline{A_n})$ MONOTONA NON DECRESCENTE

$$P(\lim \overline{A_n}) = \lim P(\overline{A_n})$$

FINIRE

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

f CONTINUA IN x_0 SE E SOLO SE, PER
OGNI SUCCESSIONE DI PUNTI $(y_n)_{n \geq 1}$

CON $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, SI HA $\underbrace{f(y_n) \rightarrow f(x_0)}$

$$f(\lim y_n) = \lim f(y_n)$$

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

Dimostrando prima il caso FINITO

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

INDUZIONE
 $n=2$?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) \end{aligned}$$

CASO INDEFINITO: FARE

$$(A_n) \quad P\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n P(A_n)$$

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_1 \cup A_2$$

$$B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$B_n = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup A_n$$

(B_n) NON DECREASES

$$P(\underbrace{\lim_n B_n}) = \lim_n P(\underbrace{B_n}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) =$$

$$\underbrace{\bigcup_{n \geq 1} B_n}$$

$$A_1 \cup$$

$$A_1 \cup A_2 \cup$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup$$

$$\bar{A}_1 \cup \dots \cup A_n \cup$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

$$= \lim_n \underbrace{P(A_1 \cup \dots \cup A_n)}_{\leq P(A_1) + \dots + P(A_n)}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (P(A_1) + \dots + P(A_n))$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

$$a_n, b_n$$

$$a_n \leq b_n$$

||

||

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

$$P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

$$\Rightarrow \lim_n a_n \leq \lim_n b_n$$

Proprietà della Probabilità

- Spazio di probabilità **discreto**: (e.g. p. 22)

▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ (finito o numerabile)

▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$

▶ ogni prob. P su questo spazio può essere data assegnando

$$P(\{\omega_i\}) = p_i$$

◀ $\underline{p_1, p_2, \dots}$ con

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ per ogni } i \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

VERIFICA

$(P1), (P2)$

e ponendo, per $A \in \mathcal{F}$,

$$A = \{\omega_1, \omega_7, \omega_{11}, \dots\}$$

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$$

$$P(A) = p_1 + p_7 + p_{11} + \dots$$

- ESEMPIO. Su $\Omega = \mathbb{N}$, $p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ con $\lambda > 0$; su $\Omega = \mathbb{N}_+$,
 $p_i = \frac{1}{2^i}$

Proprietà della Probabilità

- Equiprobabilità su uno spazio finito:

- ▶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

- ▶ $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- ▶ $p_i = \frac{1}{n}$ per ogni i , così riesce per $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\#A}{n} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$$

dove $\#A$ = numerosità di A

- Schema tipico di giochi in condizioni di simmetria: lancio di dadi, monete, estrazioni di carte, roulette, estrazioni da urne, ...

Proprietà della Probabilità

- ESERCIZIO. Lancio di due dadi
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ dove $A = \text{"la somma dei dadi è 7"}$, $B = \text{"il massimo dei dadi è 5"}$
- ESERCIZIO. Lancio di n monete
 - ▶ descrivere lo spazio di probabilità
 - ▶ calcolare le probabilità di $E_i = \text{"esce testa al lancio } i\text{"}$, $A_i = \text{"esce testa per la prima volta al lancio } i\text{"}$, $B = \text{"escono teste e croci in ugual numero"}$, $C_i = \text{"escono esattamente } i \text{ teste"}$

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} \quad \begin{array}{l} 36 \\ \text{CASI} \end{array}$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1^{\text{o}} \text{ DADO} & 2^{\text{o}} \text{ DADO} \end{array}$

SIMMETRIA

$$P(A) = \frac{\# \text{ STATI DEL MONDO IN } A}{36}$$

A = "SOMMA $\bar{E}$ 7"

B = "MAX $\bar{E}$ 5"

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

1°
0000

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

2° 0000

	1	2	3	4	5	6
1					○	*
2					⊗	
3				*	○	
4			*		○	
5	○	⊗	○	○	○	
6	*					

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{13}{36}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{2}{36} = \frac{13}{36}$$

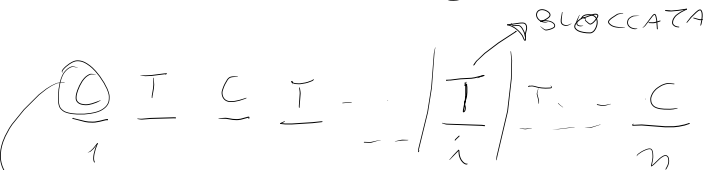
$$\Omega = \{T, C\}^n = \{(L_1, L_2, \dots, L_n) \mid L_i = T \text{ o } L_i = C\}$$

2^n STATI DEL MONDO

$$P(A) = \frac{\#A}{2^n}$$

$$A \subset \Omega$$

$$P(E_i) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$



2 SCELTE
POSSIBILI

2^{n-1}
(45)
POSSIBILI

$$P(A_i) = \frac{2^{n-i}}{2^n} = \frac{1}{2^i}$$

$$\underbrace{\frac{C}{1} \quad \frac{C}{1} \quad - \quad \dots \quad \frac{C}{i-1} \quad \frac{T}{i}}_i \quad \underbrace{\frac{?}{i+1} \quad - \quad \frac{?}{n}}_{n-i}$$

4 PARI



SU n
POSIZIONI DEVE
SCEGLIERE LE
 $\frac{n}{2}$ POSIZIONI DOVE
SI VERIFICA T

$$P(C_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

$$\overbrace{1 \quad 2 \quad \dots \quad n}^{i \quad T}$$