

Probabilità Condizionata e Indipendenza

Probabilità Condizionata

- Idea: come **aggiornare la valutazione** in base all'arrivo di nuove informazioni?
 - ▶ se si sa che l'evento B è V, come cambia la probabilità dell'evento A ?
 - ▶ **$P(A|B)$ probabilità di A condizionata a B** (A dato B / A condizionata al verificarsi di B / ...)
- Il condizionamento può riflettere
 - ▶ una ipotesi di lavoro
 - ▶ un effettivo aumento di informazione
- Interessa in particolare se $P(A|B) > P(A)$ (o $<$, o $=$)

Probabilità Condizionata

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità, $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$; la probabilità di A condizionata a B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

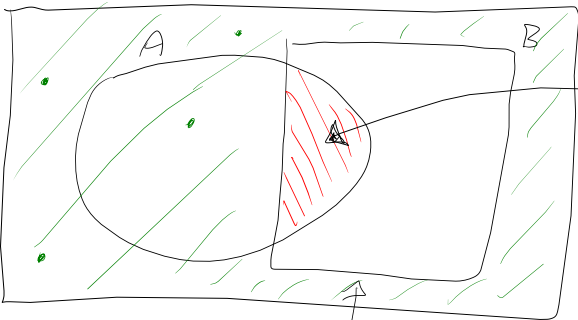
- Intuizione:

- ▶ se B si è verificato, il nuovo spazio degli stati è $B \subset \Omega$
- ▶ A si verifica solo se si verifica $A \cap B$, con probabilità $P(A \cap B)$
- ▶ si “normalizza” dividendo per $P(B)$

$$A \cap B = B$$

- Osservazione: se $B \subset A$ allora $P(A|B) = 1$; se $B \subset \bar{A}$ allora $P(A|B) = 0$

$$A \cap B = \emptyset$$

Ω 

$$P(A|B)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

↑
NORMALIZZARE

B è il nuovo
insieme di casi possibili

Probabilità Condizionata

- ESERCIZIO. Lancio di due dadi

- ▶ per $A = \text{"la somma dei dadi è 7"}$

$B = \text{"il massimo dei dadi è 5"}$

$C = \text{"la differenza tra i due dadi è 1"}$

| DIFFERENZA TRA 1° E 2° DADO |

- ▶ riesce

$$P(A|B) > (\text{ o } < \text{ o } =) P(A)?$$

$$P(C|B) > (\text{ o } < \text{ o } =) P(C)?$$

$$\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq j, i \leq 6\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} > \frac{1}{6} = P(A)$$

$$P(C|B)$$

$$P(C)$$

	1	2	3	4	5	6
1		*			○	
2	*		*		○	
3		*		*	○	
4			*		○*	
5	○	○	○	○*	○	*
6					*	

$$P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(C|B) = \frac{2}{9} < P(C)$$

Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità

- ▶ [Teorema delle probabilità composte (I)] $A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

- ▶ [Teorema delle probabilità composte (II)] $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$

$P(A_1 | A_2 \cap A_3) P(A_2 | A_3) P(A_3) =$
~~~~~  
 $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) =$   
 $= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$



$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \text{A}$$

$$\begin{aligned}
 & P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \\
 & = \cancel{P(A_1)} \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \dots \frac{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}
 \end{aligned}$$

# Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità

- ▶ [Disintegrabilità (I)]  $A, B \in \mathcal{F}, 0 < P(B) < 1$

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

FINITA O  
NUMERABILE

- ▶ [Disintegrabilità (II)]  $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$  partizione discreta di  $\Omega$ ,  $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i)P(A|B_i)$$

prob. di  $A$  è media ponderata delle prob. condizionate ad **alternative esaustive**; inoltre,

$$\min_i P(A|B_i) \leq P(A) \leq \max_i P(A|B_i)$$

$$\underbrace{P(\Omega)}_{=1} = P\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i P(B_i)$$

QUINDI ALMENO UNO DEI  $B_i$  HA  
 PROB.  $> 0$

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left( \bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i \underbrace{(A \cap B_i)}_{\substack{\text{A OVE A} \\ \text{OVB} \\ \text{DISJUNTI}}}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right)$$

$$= \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_{i: P(B_i) > 0} P(A \cap B_i)$$

$$A \cap B_i \subset B_i$$

$$= \sum_{i: P(B_i) > 0} P(B_i) P(A|B_i)$$

# Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità

► [Teorema di Bayes (I)]  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ ,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

► [Teorema di Bayes (II)]  $(B_i)_i \subset \mathcal{F}$  partizione discreta di  $\Omega$  con  $P(B_i) > 0$  per ogni  $i$ ,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) > 0$ ,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_h P(B_h)P(A|B_h)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) P(A|B)}{P(A)}$$

TEOREMA DELLE  
PROB. COMPOSTE

# Probabilità Condizionata

- Teorema di Bayes; interpretazione
  - ▶ “ribaltare” la valutazione:  $P(B|A)$  in termini di  $P(A|B)$
  - ▶  $B_i$  “ipotesi” (non si sa quale evento della partizione è  $V$ );  $A$  “osservazione, dati”  
 $P(B_i)$  = valutazione iniziale (a **priori**) sull’ipotesi;  
 $P(B_i|A)$  = valutazione finale (a **posteriori**) data l’osservazione
- Statistica Bayesiana:
  - ▶  $(P(B_i))_i$  distribuzione iniziale sul parametro della distribuzione di una variabile
  - ▶  $A$  osservazione della variabile
  - ▶  $(P(B_i|A))_i$  distribuzione finale

$$\underline{P(A_1 \cup A_2 | B)} = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$$

$$P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1 \cap A_2)$$



# Probabilità Condizionata

- Proprietà della probabilità condizionata;  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità

► <sup>FISSATO</sup>  $B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$ ; la funzione  $P_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

$$P_B(A) = P(A|B), \quad A \in \mathcal{F}$$

è una probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F})$

↪ la probabilità condizionata ha le **stesse proprietà** di quella non condizionata

► inoltre, se  $C \in \mathcal{F}$  con  $P(B \cap C) > 0$

$$(P_B)_C = P_{B \cap C}$$

↪ condizionare in successione a  $B$  e  $C \equiv$  condizionare a  $B \cap C$

$(B_n)_{n \geq 1}$  PARTIZIONE  $(P(B_n) > 0 \ \forall n)$

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n)$$

$$P(A|C) = P_C(A) = \sum_n \underbrace{P_C(A|B_n)}_{? \longrightarrow P(A|C \cap B_n)} \underbrace{P_C(B_n)}_{P(B_n|C)}$$

$P_B$  è una prob. su  $(\Omega, \mathcal{F})$

$$1) \quad P_B(\phi) = 0$$

$$P(\phi|B) = 0$$

$$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= 1 \\ \parallel \\ P(\Omega|B) &= 1 \end{aligned}$$

2)  $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{F}$ , A OVE A OVB DISTRIBUTI

$$P_B(\bigcup_n A_n) = \sum_n P_B(A_n)$$

$$\begin{aligned}
 P_B \left( \bigcup_n A_n \right) &= P \left( \bigcup_n A_n \mid B \right) = \frac{P \left( \left( \bigcup_n A_n \right) \cap B \right)}{P(B)} \\
 &= \frac{P \left( \bigcup_n \overbrace{(A_n \cap B)}^{A \text{ ou } A \text{ ou } \text{DISJUNTI}} \right)}{P(B)} \\
 &= \frac{\sum_n P(A_n \cap B)}{P(B)} \\
 &= \sum_n \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_n P_B(A_n)
 \end{aligned}$$

$$(P_B)_C = P_{B \cap C}$$

2 FUNZIONI DEFINITE  
su  $\mathcal{F}$

$$A \in \mathcal{F}$$

$$(P_B)_C(A) = P_{B \cap C}(A) ?$$

$$(P_B)_C(A) = P_B(A|C) = \frac{P_B(A \cap C)}{P_B(C)} = \frac{P(A \cap C|B)}{P(C|B)}$$

$$= \frac{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)}}{\frac{P(B \cap C)}{P(B)}} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}$$

$$= P(A|B \cap C) = P_{B \cap C}(A)$$

# Probabilità Condizionata

- ESERCIZIO. Una portafoglio di rischi è classificato in *buoni* (20%), *normali* (45%), *mediocri* (35%); la prob. di sinistro è rispettivamente 0.02, 0.05, 0.15
  - ▶ per un nuovo rischio, qual è la probabilità di sinistro?
  - ▶ se un rischio produce un sinistro, con quale probabilità il rischio è buono, normale, mediocre?

$E$  = "IL NUOVO RISCHIO PRODUCE UN SINISTRO"

$B, N, M$  = "IL NUOVO RISCHIO È BUONO"  
NORMALE  
MEDIOCRE

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|B) \cdot P(B) + P(E|N)P(N) + P(E|M)P(M) \\ &= 2\% \cdot 20\% + 5\% \cdot 45\% + 15\% \cdot 35\% \\ &= 0.079 = 7.9\% \end{aligned}$$



$$P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = \frac{0.02 \cdot 0.2}{0.079}$$

BAYES

$$= 0.0506$$

# Probabilità Condizionata



- ESERCIZIO. “Monty Hall Problem”: gioco TV in cui un concorrente deve scegliere una porta su tre dietro una porta c'è un premio (e.g. un'auto), dietro le altre due non c'è niente
  - ▶ dopo che il concorrente ha scelto, il presentatore (che sa dove si trova il premio) apre una delle altre due porte che è vuota
  - ▶ il presentatore offre al concorrente la possibilità di cambiare la porta scelta con l'altra ancora chiusa; **conviene farlo?**
  - ▶ ipotesi: se il presentatore può scegliere che porta aprire, sceglierà a caso

$E_i = \text{"IL PREMIO È DIETRO LA PORTA } i \text{"}$

$i = 1, 2, 3$

$$P(E_i) = \frac{1}{3} \quad i = 1, 2, 3$$

IL CONCORRENTE SCEGLIE LA PORTA 1

$C_i = \text{"IL PRESENTATORE APRE LA PORTA } i \text{"}$

$$P(E_i) = 1/3 \quad i = 1, 2, 3$$

$$P(E_i | C_2)$$

$$P(E_1 | C_2) = \frac{1}{3} = P(E_1)$$

$$P(E_2 | C_2) = 0$$

$$P(E_3 | C_2) = \frac{2}{3} > P(E_3) = \frac{1}{3}$$

CONVIENE  
CAMBIARCE!

$$P(E_1|C_2) = \frac{P(C_2|E_1)P(E_1)}{P(C_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(C_2) = P(C_2|E_1)P(E_1) + P(C_2|E_2)P(E_2) + \\ + P(C_2|E_3)P(E_3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{3} \rightarrow P(E_1|C_2) = \frac{1}{3}$$

100 PORTE

|1|

—

—

—

—

|100|

PRESENTATORE      APRE 98 PORTE VUOTE

# Probabilità Condizionata

- ESERCIZIO. In matematica attuariale vita, per un individuo neonato, si considera, per  $x \geq 0$ ,

$T$

$$E_x = \text{"l'individuo sopravvive all'età } x\text{"} = \{T > x\}$$

- ▶ che relazione c'è tra gli eventi  $E_x$ ?
- ▶ esprimere i simboli attuariali

$$E_x \supset E_y \quad x < y$$

$${}_t p_y, {}_t q_y, {}_{t|h} q_y$$

tramite gli eventi  $E_x$

- ▶ dimostrare la relazione

$${}_{t+s} p_x = {}_t p_x \cdot {}_s p_{x+t}$$

$${}_tP_y = P(E_{y+t} | E_y)$$

$${}_tq_y = 1 - {}_tP_y = P(\overline{E_{y+t}} | E_y)$$

$${}_t|_nq_y = P(E_{y+t} \cap \overline{E_{y+t+n}} | E_y)$$

$$\underbrace{{}_{t+s}P_x}_{\text{}} = {}_tP_x \cdot {}_sP_{x+t}$$

$$P(E_{x+t+s} | E_x)$$



$$n P_x = P_x \cdot P_{x+1} \cdot \dots \cdot P_{x+n-1}$$

$$P(E_{x+t+s} | E_x) = P(E_{x+t+s} \cap E_{x+t} | E_x) =$$

$$E_{x+t+s} \subset E_{x+t}$$

$$= P(E_{x+t} | E_x) - P(E_{x+t+s} | E_{x+t} \cap \overline{E_x})$$

TEOREMA DELLE PROB. COMPOSTE (CONDIZIONATO)

$$= {}_r P_x \cdot {}_s P_{x+t}$$

# Correlazione tra Eventi

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità

- ▶  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(B) > 0$ ;  $A$  è correlato positivamente / correlato negativamente / non correlato con  $B$  se

$$P(A|B) > P(A), \quad P(A|B) < P(A), \quad P(A|B) = P(A)$$

sapere che  $B$  si verifica fa incrementare la prob. di  $A$

- ▶ se anche  $P(A) > 0$ , le relazioni sono simmetriche
- ▶  $A$  correlato positivamente / negativamente / non correlato con  $B$   
 $\Rightarrow \bar{A}$  è correlato negativamente / positivamente / non correlato con  $B$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)}$$

$$\frac{P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

# Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità; due eventi  $A, B \in \mathcal{F}$  sono **indipendenti** se vale la proprietà di fattorizzazione

$$P(A' \cap B') \\ = P(A') \cdot P(B')$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A, \bar{B} \\ \bar{A}, B \\ \bar{A}, \bar{B}$$

- ▶ segue che  $A'$  e  $B'$  sono indipendenti, per ogni scelta di  $A' = A$  o  $A' = \bar{A}$  e di  $B' = B$  o  $B' = \bar{B}$
- ▶ se  $A$  ha probabilità **estrema**,  $P(A) \in \{0, 1\} \Rightarrow A$  è indipendente da ogni evento  $B$
- ▶ se  $P(B) > 0$ , allora  $A, B$  sono indipendenti  $\iff A$  non correlato con  $B$

$$A, B \text{ INDP.} \Rightarrow A, \bar{B} \text{ INDP.}$$

$$P(A) = P(A \cap \underbrace{(B \cup \bar{B})}_{\Omega}) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$= P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P(A) = 0$$

$$\frac{P(A \cap B)}{=0} \stackrel{?}{=} \frac{\overbrace{P(A) P(B)}^{=0}}{=0}$$

$$A \cap B \subset A$$

$$P(A) = 1$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 0$$

$$\bar{A}, B \text{ indep.}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\bar{A})}_=A, B \text{ indep.}$$

$$P(B) > 0$$

$$A, B \text{ indep.} \Leftrightarrow P(A|\cancel{B}) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$\begin{array}{c} \hline \parallel \\ P(A) \cdot P(B) \end{array}$$

SE  $A, B$  indep.

# Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità
  - ▶  $(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{F}$ , famiglia di eventi qualunque, sono indipendenti se per ogni  $n \geq 1$ , per ogni  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$  (distinti),

$$P(A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_n}) = P(A_{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{\alpha_n})$$

$\rightsquigarrow$  fattorizzazione su ogni sotto-famiglia finita

- ▶ conoscere il valore di alcuni degli eventi non modifica la valutazione sugli altri eventi
  - ▶ per un famiglia finita  $A_1, \dots, A_n \rightsquigarrow 2^n - n - 1$  condizioni tutte necessarie
- ESERCIZIO. Scrivere tutte le condizioni di fattorizzazione per  $n = 2, 3, 4$  eventi



$A_1, A_2, \dots, A_{10}$  INDIPENDENTI

$$n=2 \quad \binom{10}{2}$$

$$n=3 \quad \binom{10}{3}$$

$\vdots$

$$n=9 \quad \binom{10}{9} = 10$$

$$n=10 \quad \binom{10}{10} = 1$$

$$\begin{aligned} & \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{10} = \\ & + \binom{10}{1} + \binom{10}{0} = 2^{10} \\ & 2^{10} - 10 - 1 = \end{aligned}$$

# Eventi Indipendenti

- ESERCIZIO. 3 eventi non indipendenti ma **indipendenti a coppie**
  - ▶  $\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$ ,  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ,  
 $P(\{\omega\}) = 1/9$  per ogni  $\omega \in \Omega$
  - ▶  $A_k = \text{"la } k\text{-esima lettera è } a"$ ,  $k = 1, 2, 3$
- ESERCIZIO. Si estrae una carta da un mazzo di 52; il rango è indipendente dal seme
- ESERCIZIO. Lancio di due dadi,  $A = \text{"la somma dei dadi è } 7"$  è indipendente dal risultato del primo (o del secondo dado)

$A_k = \text{"k-ESIMA LETTERA È 'a'"} \quad ||$

$$A_1 = \{abc, acb, aaa\} \quad P(A_1) = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \{cab, bac, aaa\} \quad P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \{cba, bca, aaa\} \quad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(\{aaa\}) = \frac{1}{9} = P(A_1)P(A_2)$$

SIMILE PER  $A_1, A_3$  E  $A_2, A_3$

MA  $A_1, A_2, A_3$  non indep.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{aaa\}) = \frac{1}{9}$$

$$\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{27}$$

MAZZO DI CARTE

$$\Omega = \left\{ (i, j) \mid \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 13 \\ j = C, Q, F, P \end{array} \right\}$$

$$|\Omega| = 52$$

$$P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{52}$$

$R_i = \text{"il RANGO \u00c9 } i\text{"}$

$$P(R_i) = \frac{1}{13}$$

$S_j = \text{"il SEME \u00c9 } j\text{"}$

$$P(S_j) = \frac{1}{4}$$

$$P(\underbrace{R_i \cap S_j}_{\{(i, j)\}}) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4}$$

2 DADI

$$A = \text{"SOMMA} = 7\text{"} \quad P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \text{"IL PRIMO DADO È 2"} \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(2, 5)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

---

$$C = \text{"SOMMA È 6"} \quad P(C) = \frac{5}{36}$$

$$P(C \cap B) = P(\{(2, 4)\}) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

MATHEO SI CARTE

$$\{R_1, \text{---}, R_{13}\} = \mathcal{A}_1 \rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1)$$

$$\{S_C, S_Q, S_F, S_P\} = \mathcal{A}_2 \rightarrow \sigma(\mathcal{A}_2)$$

$R_1$   $R_2$  invip.

# Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità
  - ▶ gli insiemi di eventi  $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ , con  $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$  per ogni  $\alpha \in I$ , sono indipendenti se per ogni  $n \geq 1$ , per ogni  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$  (distinti), per ogni  $A_1 \in \mathcal{A}_{\alpha_1}, \dots, A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

- ▶ conoscere il valore degli eventi di alcuni dei sottoinsiemi non modifica la valutazione sugli eventi degli altri sottoinsiemi
- ▶ gli eventi all'interno di ogni insieme  $\mathcal{A}_\alpha$  potrebbero essere dipendenti
- ▶  $\mathcal{A}_\alpha = \{A_\alpha\}$  per ogni  $\alpha \rightsquigarrow$  si torna alla definizione precedente



# Eventi Indipendenti

- ESEMPIO. Lancio di  $n$  dadi,  $D_{i,j}$  = "il risultato del  $j$ -esimo dado è  $i$ ",  $i = 1, \dots, 6$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; le partizioni

$$\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$$

$\mathbb{P}_1$

1° LANCIO

$\mathbb{P}_2$

2° LANCIO

con  $\mathbb{P}_j = \{D_{1,j}, \dots, D_{6,j}\}$ , sono indipendenti

- ESEMPIO. Ripetuti lanci di due dadi; al lancio  $n$ -esimo,  $A_n$  = "la somma dei dadi è 7",  $B_n$  = "il massimo dei dadi è 5"

$$\mathcal{A}_n = \{A_n, B_n\}, n \geq 1$$

sono indipendenti

(MA  $A_n, B_n$  NON SONO  
INDIPENDENTI (n FISSATO))

$$P_1 - \dots - P_{10}$$

$$n=3$$

$$P_3, P_5, P_7$$

$$D_{1,3} \quad D_{4,5} \quad D_{6,7}$$

$$\begin{aligned} P(D_{1,3} \cap D_{4,5} \cap D_{6,7}) &= \\ &= P(D_{1,3}) P(D_{4,5}) P(D_{6,7}) \end{aligned}$$

$$P((D_{1,3} \cup \overline{D_{4,5}}) \cap D_{6,7}) = P(D_{1,3} \cup \overline{D_{4,5}}) \cdot P(D_{6,7})$$

$$P(\underbrace{(D_{1,3} \cup \overline{D_{4,5}})}_{\uparrow} \cap \underbrace{(\overline{D_{4,5}} \cup D_{6,7})}_{\uparrow}) \neq P(\quad) \cdot P(\quad)$$

$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$  independent

$$P(\underbrace{\{(E_1 \cap \bar{E}_2) \cup E_3 - E_4\}}_{\in \sigma(\{E_1, E_2, E_3, E_4\})} \cap \underbrace{\{(E_5 \cap E_6) \cup \bar{E}_7\} \Delta E_3}_{\in \sigma(\{E_5, E_6, E_7, E_{10}\})})$$

# Eventi Indipendenti

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità;  $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ , con  $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$  per ogni  $\alpha \in I$  ( $\mathcal{A}_\alpha$  sono insiemi di eventi), **indipendenti**
  - ▶ [**“Estensione”**] se ogni  $\mathcal{A}_\alpha$  è chiuso rispetto a intersezioni finite, allora  $(\sigma(\mathcal{A}_\alpha))_{\alpha \in I}$  sono indipendenti
  - ▶ [**“Impacchettamento”**] se  $(I_\beta)_{\beta \in J}$  è una partizione di  $I$ , allora le  $\sigma$ -algebre

$$\mathcal{F}_\beta = \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in I_\beta} \mathcal{A}_\alpha\right), \beta \in J$$

sono indipendenti

- ▶ si può estendere l'indipendenza agli eventi in  $\sigma$ -algebre generate e impacchettare insiemi indipendenti per ottenere nuovi insiemi indipendenti

$E_1, E_2, \dots, E_n$  INDEPENDENT,

ALSO

$$P(E'_1 \cap E'_2 \cap \dots \cap E'_n) = P(E'_1)P(E'_2) \dots P(E'_n)$$

$$E'_i \subset \overline{E_i}$$

$$\sigma(\{E_i\}) = \{ \emptyset, \Omega, E_i, \overline{E_i} \}$$

# Eventi Indipendenti

- ESERCIZIO. Infiniti lanci di una moneta: EQUA

$$\Omega = \{(\underbrace{L_1 L_2 \dots L_n \dots}) \mid L_i = T \text{ o } L_i = C\}$$

$E_n$  = "esce T al lancio  $n$ ",  $\mathcal{F} = \sigma(\{\underbrace{E_1, \dots, E_n, \dots}\})$ ,  $(E_n)_n$  indipendenti,  $\underbrace{P(E_n) = 1/2}$  per ogni  $n$  (moneta equa);  
calcolare

- ▶  $P(E'_1 \cap \dots \cap E'_n)$  per ogni scelta di  $E'_i = E_i$  o  $E'_i = \bar{E}_i$
- ▶  $P(\{\omega\})$  per ogni  $\omega \in \Omega$
- ▶  $P(\text{"T appare prima o poi"})$
- ▶  $P(\text{"una data sequenza di T e C di fissata lunghezza } k \text{ appare prima o poi"})$



$$P(E'_1 \cap E'_2 \cap \dots \cap E'_n) =$$

$$= P(E'_1) \cdot P(E'_2) \cdot \dots \cdot P(E'_n) = \frac{1}{2^n}$$


---

$$\omega = \overline{E_1} \overline{E_2} \overline{E_3} \overline{E_4} E_5 \overline{E_6} E_7 \dots$$

$\{\omega\}$

$B_n = \text{"SI VERIFICA LA SECUENCIA FINO AL LANCIO } n\text{"}$

$$\omega \in B_n \quad \{\omega\} \subset B_n \quad P(\{\omega\}) \leq P(B_n) = \frac{1}{2^n}$$



$$\Rightarrow P(\{\omega\}) = 0 \quad \text{PER OGNI } \omega \in \Omega$$


---

$$H = \text{"T APPARE PRIMA O POI"} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

$$\overline{H} = \text{"T NON APPARE MAI"} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \dots$$

$$= \{CCCC \dots CCC \dots\}$$

$$P(\overline{H}) = 0 \Rightarrow P(H) = 1$$

$K =$  "UNA DATA SEQUENZA DI LUNGHEZZA  
 $K$  ESCE PRIMA O POI"

$K \geq 1$  FISSATO  $P(K) \geq 1$  ?

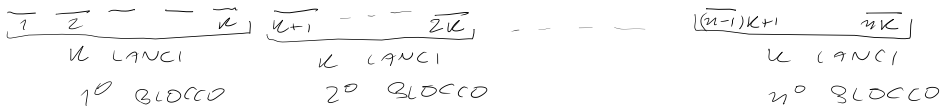
$$P(\bar{K}) = 0 ?$$

$n \geq 1$

$U_{nK} =$  "LA DATA SEQUENZA NON ESCE  
NEI PRIMI  $nK$  LANCI"

$\bar{K} \subset U_{nK}$  PER OGNI  $n \geq 1$

$V_{nk} =$  "LA DATA SEQUENZA NON ESCE  
IN NESSUNO DEGLI  $n$  BLOCCHI  
FATTO DA  $k$  LANCI CONSECUTIVI"



$$\overline{K} \subset V_{nk} \subset V_{nk}$$

$$P(V_{nK}) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n$$

$$P(\bar{K}) \leq \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n}_{< 1}$$

$\rightarrow 0$   
 SE  $n \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow P(\bar{K}) = 0$$

PER OGNI  $n \geq 1$