# Derivazione domanada Walrasiane e Hicksiana

## Domanda Walrasiana

Il problema da risolvere è quellodi massimizzare la domanda dato un vincolo di bilancio:

$$\max_{\{x,y\}} x + \ln(1+y)$$

$$x + p \cdot y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$$

Dove $p > 0$ è ilprezzo del bene $y$

**Soluzione**

$$L = x + \ln(1+y) - \delta\,(x + p \cdot y - 10)$$

1. $1 - \delta \leq 0,\ x \geq 0,\ x(1-\delta) = 0$
2. $\frac{1}{y+1} - \delta\, p \leq 0,\ y \geq 0,\ y\left(\frac{1}{y+1} - \delta\, p\right) = 0$
3. $x + p \cdot y \leq 10,\ \delta \geq 0,\ \delta(x + p \cdot y - 10) = 0$

<u>Assumi $\delta = 0$.</u>

La condizione 1. diventa $1 \leq 0$. Una contraddizione. Quindi deve essere $\delta > 0$. Di conseguenza la condizione 3. diventa

3. $x + p \cdot y = 10.$

<u>Assumi $x = 0$ e $y = 0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

La condizione 3. diventa $10 = 0$.

Contradddizione!

<u>Assumi $x = 0$ e $y > 0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

La condizione 1. diventa $\delta \geq 1$.

La condizione 2. diventa $\delta\ = \frac{1}{p(y+1)}$

Dalla condizione 3. otteniamo $y\ = \frac{10}{p}$ e sostituendo nella 2. otteniamo $\delta\ = \frac{1}{10+p}$ che è minore di 1 dato che $p$ è positivo.

Contraddizione con la condizione 1.

<u>Assumi $y = 0$ e $x > 0$ (ricorda che $\delta > 0$).</u>

Le condizioni sono:

1. $1 - \delta = 0$
2. $1 - \delta\, p \leq 0,$
3. $x = 10$

Dalla condizione 1. Otteniamo $\delta = 1$

La condizione 2. è soddisfatta solo se $p \geq 1$

Soluzione: $x = 10, y = 0,\ \delta = 1$ quando $p \geq 1$

$U^* = 10$

<u>Assumi $y > 0$ (ricorda che $x > 0$ e $\delta > 0$).</u>

1. $1 - \delta = 0$
2. $\frac{1}{y+1} - \delta\, p = 0$
3. $x + p \cdot y = 10$

Dalla condizione 1. otteniamo $\delta = 1$

Dalla condizione 2. otteniamo $y = \frac{1-p}{p}$

Sostituendo in 3. otteniamo

$x + p\frac{1-p}{p} = 10 \rightarrow x = 9 + p$

Soluzione: $x = 9 + p, y = \frac{1-p}{p},\ \delta = 1$ quando $p \leq 1$

$U^* = 9 + p + \ln(1 + \frac{1-p}{p}) = 9 + p + \ln\frac{1}{p}$

## Domanda Hicksiana

Il problema da risolvere è quello di minimizzare la spesa dato un vincolo di utilità:

$$\min_{\{x,y\}} x + p \cdot y$$

$$x + \ln(1 + y) \geq U^*, x \geq 0, y \geq 0$$

Il problema lo riscriviamo come un problema equivalente di max

$$\max_{\{x,y\}} -x - p \cdot y$$

$$-x - \ln(1 + y) \leq -U^*, x \geq 0, y \geq 0$$

Dove $U^* > 0$ è il valore dell'utilità nella soluzione precedente

**Soluzione**

$$L = -x - p \cdot y - \delta\,(-x - \ln(1 + y) + U^*)$$

$$L = -x - p \cdot y + \delta\,(x + \ln(1 + y) - U^*)$$

1) $-1+\delta \leq 0, \quad x \geq 0, \quad x(-1+\delta)=0$
2) $-p+\frac{\delta}{1+y} \leq 0, \quad y \geq 0, \quad y\left(-p+\frac{\delta}{1+y}\right)=0$
3) $-x-\ln(1+y) \leq -U^*, \quad \delta \geq 0, \quad \delta(U^*-x-\ln(1+y))=0$

<u>Assumi $\delta = 0$</u>

La condizione 1) è soddisfatta solo per $x=0$

La condizione 2) è soddisfatta solo per $y=0$

Sostituendo in 3) vi è una contraddizione ($U^* < 0$)

Di conseguenza la condizione 3) diventa

$$3)\ x+\ln(1+y)=U^*$$

<u>Assumi $x=0$ e $y=0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

Sostituendo in 3) vi è una contraddizione ($U^* < 0$)

<u>Assumi $x=0$ e $y>0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

Le condizioni sono:

1) $\delta \leq 1, \quad x=0$
2) $-p+\frac{\delta}{1+y}=0, \quad y>0$
3) $\ln(1+y)=U^*, \quad \delta>0$

Dalla 3) → $y=e^{U^*}-1$

Sostituendo in 2) → $\frac{\delta}{e^{U^*}}=p$ → $\delta = p\, e^{U^*}$

Sostituendoin 1) $p\, e^{U^*} \leq 1$ → $p \leq \frac{1}{e^{U^*}}$

<u>Assumi $x>0$ e $y=0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

1) $-1+\delta=0$
2) $-p+\delta \leq 0,$
3) $x=U^*, \quad \delta>0$

Otteniamo

1) $\delta=1$
2) $p \geq 1$
3) $x=U^*$

<u>Assumi $x>0$ e $y>0$ (Ricorda che $\delta > 0$)</u>

1) $-1+\delta=0$
2) $-p+\frac{\delta}{1+y}=0$

3) $x + \ln(1 + y) = U^*$

Otteniamo

1) $\delta = 1$
2) $y = \frac{1-p}{p}$
3) $x = U^* - \ln\frac{1}{p}$

Nota che se prendiamo la soluzione della domanda walrasiana per $x > 0$ e $y > 0$ ($x = 9 + p, y = \frac{1-p}{p},\ \delta = 1$ quando $p \leq 1$ con utilità $U^* = 9 + p + \ln(1 + \frac{1-p}{p}) = 9 + p + \ln\frac{1}{p}$ ) e sostituiamo $U^*$ in 3) otteniamo

3) $x = 9 + p + \ln\frac{1}{p} - \ln\frac{1}{p} = 9 + p$

Le soluzioni coincidono