6 Novembre $\quad (x^n)^{(n)} = n!$

$m \in \mathbb{N}$

$$(x^m)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (m-j+1)\, x^{m-n}$$

Esempio Siano $a_0, \dots, a_n$ delle costanti arbitrarie e consideriamo il polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k$$

Risulta che $p(x)$ è l'unico polinomio con $\deg p(x) \le n$ t.c.

(1) $p^{(k)}(0) = a_k$ per ogni $k = 0, \dots, n$

(qui $p^{(0)}(x) = p(x)$)

Verifichiamo (1)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} x^j$$

$$p^{(k)}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} x^j \right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} (x^j)^{(k)}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{a_j}{j!} \underbrace{(x^j)^{(k)}}_{0} + \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(k)} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} (x^j)^{(k)}$$

$$p^{(k)}(x) = \frac{a_k}{\cancel{k!}} \cancel{k!} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \prod_{l=1}^{k} (j-l+1)\, x^{j-k}$$

$$p^{(k)}(0) = a_k + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \prod_{l=1}^{k} (j-l+1)\, \underbrace{0^{j-k}}_{0}}_{0}$$

$$= a_k \qquad \forall k = 0, \dots, n$$

ho dimostrato che $\forall k = 0, \dots, n$

(1) $p^{(k)}(0) = a_k$

per il polinomio $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} x^j$.

Ora dimostriamo che $p(x)$ è l'unico polinomio di grado $\le n$ che soddisfa la (1)

supponiamo che $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, che è t.c. $\deg q \le n$, sia t.c. $q^{(k)}(0) = a_k$ per $k = 0, \dots, n$.

Voglio dimostrare che $q(x) = p(x)$.

$\left(p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} x^j \right)$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(j!\, b_j)}{j!} x^j$$

$\frac{a_j}{j!}$

Per lo stesso conto di prima

$$q^{(k)}(0) = k!\, b_k \qquad \forall k = 0, \dots, n$$
$$= a_k$$

Cioè ricaviamo $k!\, b_k = a_k \qquad \forall k = 0, \dots, n$

$$b_k = \frac{a_k}{k!}$$

Più in generale vale quanto segue

Lemma Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ delle costanti assegnate. Allora esiste un unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$p^{(k)}(x_0) = a_k \qquad k = 0, \dots, n$$

e si ha $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x-x_0)^k$$

Def Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Supponiamo che esistano $f^{(k)}(x_0)$ $k = 0, \dots, n$.
Allora il polinomio di Taylor di ordine n nel punto x_0 della funzione f è il polinomio

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

Osservazione 1) $\deg P_n(x) \leq n$.

2) Nel caso $x_0 = 0$ si parla di polinomi di Mc Laurin

3) $P_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ t.c. $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\forall\, k = 0, \dots, n$.

Esempio Calcoliamo tutti i polinomi di McLaurin di $(1+x)^a$ dove $a \in \mathbb{R}$.

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{l=1}^{j}(a-l+1)}{j!} x^j$$

Notare che se a è un numero ~~naturale~~ intero ≥ 0 e $a \geq j$ allora

$$\frac{\prod_{l=1}^{j}(a-l+1)}{j!} = \frac{\overbrace{a(a-1)\cdots(a-j+1)\,(a-j)!}^{a!}}{j!\,(a-j)!}$$

$$= \binom{a}{j}$$

Denotiamo $\binom{a}{j} = \frac{\prod_{l=1}^{j}(a-l+1)}{j!}$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$\forall\, j \geq 0$ intero

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j$$

Esempio Calcoliamo tutti i polinomi di McLaurin di $f(x) = (1+x)^a$ dove $a \in \mathbb{R}$.

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod_{l=1}^{j}(a-l+1)}{j!} x^j \quad * \quad \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j$$

Si tratta di dimostrare che

$$\left((1+x)^a \right)^{(j)} \Big|_{x=0} = \prod_{l=1}^{j} (a-l+1) \qquad (2)$$

La volta scorsa abbiamo calcolato

$$\left(x^a \right)^{(n)} = \prod_{l=1}^{n} (a-l+1) \, x^{a-n}$$

$$\Downarrow$$

$$\left((1+x)^a \right)^{(n)} = \prod_{l=1}^{n} (a-l+1) \, (1+x)^{a-n}$$

Notare che se conosco $f^{(n)}(x)$ e se

$g(x) = f(x-x_0)$ allora $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x-x_0)$

$f(x) = x^a$, $x_0 = -1 \Rightarrow g(x) = (1+x)^a$

$$\left((1+x)^a \right)^{(n)} \Big|_{x=0} = \prod_{l=1}^{n} (a-l+1) \, (1+x)^{a-n} \Big|_{x=0}$$

$$= \prod_{l=1}^{n} (a-l+1)$$

per $n = j$ ottengo la (2).

Esempio

$$f(x) = (1+x)^n$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = (1+x)^n = f(x)$$

Esempio $f(x) = x^7 + x^3 + 1$

P_{11} in x_0

$$P_{11}(x) = \sum_{j=0}^{11} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j = f(x)$$

Il nostro obiettivo è il calcolo dei polinomi di McLaurin di un certo numero di funzioni

<u>Esempio 1</u> $f(x) = e^x$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \qquad (3)$$

Verifichiamo (3)

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(e^x)^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j$$

$$(e^x)^{(j)} = e^x$$

$$(e^x)^{(j)}(0) = e^0 = 1$$

Esempio $(\sin x)^{(n)}$

$$(\sin x)^{(0)} = \sin x \qquad (\sin x)^{(4)} = \sin x$$
$$(\sin x)^{(1)} = \cos x \qquad (\sin x)^{(5)} = \cos x$$
$$(\sin x)^{(2)} = -\sin x \qquad (\sin x)^{(6)} = -\sin x$$
$$(\sin x)^{(3)} = -\cos x \qquad (\sin x)^{(7)} = -\cos x$$

Se $n = 4q + r$ dove $0 \le r \le 3$

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(r)}}$$

$$\sin^{(4q+r)} x = (\sin x)^{(4q+r)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{4q+r} \sin x =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{4} \cdots \left(\frac{d}{dx}\right)^{4}}_{q \text{ volte}} \sin x = \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \sin x =$$

$$= \sin^{(r)} x$$

$n = 4q + r \quad 0 \le r \le 3$

$$\sin^{(n)} x \Big|_{x=0} = \sin^{(r)} x \Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \text{ è pari} \\ \pm 1 & \text{se } r \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\sin^{(0)} x = \sin x \qquad \sin^{(0)} x \Big|_{x=0} = 0$$
$$\sin^{(1)} x = \cos x \qquad \sin^{(1)} x \Big|_{x=0} = 1$$
$$\sin^{(2)} x = -\sin x \qquad \sin^{(2)} x \Big|_{x=0} = 0$$
$$\sin^{(3)} x = -\cos x \qquad \sin^{(3)} x \Big|_{x=0} = -1$$

$$r = 2k + 1$$

$$n = 4q + r = 4q + 2k + 1$$

$n = 2m + 1 \qquad k = 0 \iff m$ è pari

$\qquad\qquad\qquad\quad k = 1 \iff m$ è dispari

$$n = 4q + 2 + 1 = 2\underbrace{(2q+1)}_{m} + 1$$

$$n = 2m + 1$$

$$\sin^{(n)}(0) = (-1)^m$$

$$P_{2m+1}(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{2m+1} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j \qquad j = 2k+1$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\boxed{P_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$